

## Lösen von Gleichungen (Aufgaben)

1. Löse die folgende Gleichung ( $D = \mathbb{Q}$ ):

$$3 \cdot (x + 4) = 14 - \frac{2}{3}x$$

2. Gegeben ist die Gleichung

$$13 - 2x = x + 10, \quad G = \mathbb{Z}.$$

- (a) Zeige, dass  $x = 2$  keine Lösung dieser Gleichung ist.  
(b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass  $x = 2$  die Lösung der abgeänderten Gleichung ist, und führe den Nachweis.

3. Gegeben ist die Gleichung

$$7 - x = 3x + 11, \quad G = \mathbb{Z}$$

- (a) Zeige, dass  $x = -1$  die Lösung dieser Gleichung ist.  
(b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass die Lösungsmenge der abgeänderten Gleichung leer ist, und führe den Nachweis.

4. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung  $4 - 6x = 3(11 - 2x)$  ist für  $G = \mathbb{Q}$  leer.

5. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 + 8 = 6$  ist für  $G = \mathbb{Q}$  leer.

6. Maria hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):

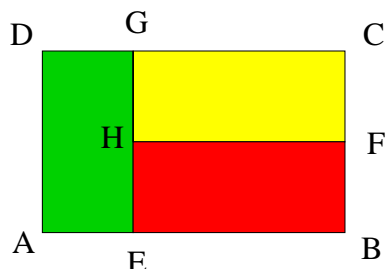
(a)  $(a - 0,5)^2 = a^2 + a + 2,5$

(b)  $(2x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 6$

(c)  $(4 - x)(x + 4) = x^2 - 16$

7. Löse für  $G = \mathbb{Q}$  die folgende Gleichung nach  $x$  auf:  
 $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = (3 + x)(x - 3) - 4x^2 - 13$

8.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet. Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 2:3. Weiter gilt:  $\overline{HF} = 3x$  cm mit  $x \in \mathbb{Q}^+$ .

- (a) Zeichne die Figur für  $x = 2$ .  
 (b) Welchen Flächeninhalt besitzt eines der inneren Rechtecke, wenn der Saum der Fahne 1 m 8 cm lang ist?

9. Löse folgende Gleichungen ( $G = \mathbb{Q}$ ):

- (a)  $4x - 5 = (x + 3) \cdot 4$   
 (b)  $x \cdot (x - 2) - 3x = x^2 + 5$   
 (c)  $2 \cdot [3 - 4 \cdot (x + 2) - 2] + \frac{1}{2} \cdot [2 - 4 \cdot (x - 1)] = 0$

10. Löse:

- (a)  $7(8x + 3) - (5x - 3) \cdot 8 = 0$   
 (b)  $\frac{1}{2} \cdot (4x + \frac{1}{3}) - \frac{1}{4}(12x + 1) = (9x - \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{3}$   
 (c)  $2(x + a) = 6 - 3x + 2a$

11. Gib zu folgenden Gleichungen jeweils die Lösungsmenge  $L_1$  zur Grundmenge  $G_1 = \mathbb{N}$  und  $L_2$  zu  $G_2 = \mathbb{Q}$  an.

- (a)  $(8x - 1)(x + 3) = 8(x - 2)^2$   
 (b)  $\frac{1}{6}(x - 2) + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}(\frac{5}{2}x - 1)$   
 (c)  $6(3x - 1) - 7(2x - 1) = 4(x + 9) - 42$

12. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ( $D = \mathbb{Q}$ ):

$$5(3 - 5x) - [4(2 + 3x) - 10] + 9x = 3x - 1$$

13. Gleichungsparkett

|   |   |   |
|---|---|---|
| $3,5x + 7,7 = 7(2,9 - x)$   | $(z - 5)(z - 6) - z(z - 8) = 0$           | $\frac{1}{b-1} = 3$                               |
| $\frac{t}{3} - \frac{t+8}{12} = \frac{11}{60}$  | $(2x + 6)^2 = 5x^2 - (x - 2)^2$           | $\frac{ax}{1+x} = 2$                              |
| $\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} = -\frac{5}{6}$  | $(7 - \frac{2}{3})y = 7(y - \frac{2}{3})$ | $\frac{z}{z-1} = -\frac{1-z}{z}$                  |
| $ b - \frac{2}{7}  = 0,5$   | $0 = 2(ab + ac + bc)$                     | $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$         |
| $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$   | $\frac{w+5}{w-2} = 0$                     | $(s - \frac{2}{3}) \cdot (2s - 1\frac{1}{4}) = 0$ |
| $(\frac{1}{2} + 2x) \cdot (\frac{1}{2} - 2x) + 2x =$<br>$(2 - x) \cdot x - \frac{13}{12}$ |   |   |

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

14. Gegeben ist die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x - 7) - \frac{3}{5}(2 - 3x) = x + 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}$$

- Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.
- Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für die Grundmengen  $G_1 = \mathbb{Q}^+$ ,  $G_2 = \mathbb{Z}$ ,  $G_3 = \mathbb{N}$  und  $G_4 = \{5; 5\frac{1}{2}; 5\frac{1}{3}; 5\frac{1}{4}; 5\frac{1}{5}; 5\frac{1}{6}\}$ .
- Verändere die rechte Seite der Gleichung so, dass  $L_1 = \{11\}$ ,  $L_2 = \{0\}$ ,  $L_3 = \{\}$  und  $L_4 = G$ .
- Lässt sich die Gleichung so abändern, dass  $L_5 = \{1; 2\}$ ?
- Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x - 7) - \frac{3}{5}(2 - 3x) = ax + 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}, \quad a \in \mathbb{Q}.$$

Für welche  $a$  gibt es genau eine Lösung? Wie lautet dann die Lösungsmenge?  
Wie sieht die Lösungsmenge in den übrigen Fällen aus?

- Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x - 7) - \frac{3}{5}(2 - 3x) = x + b \cdot 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}, \quad b \in \mathbb{Q}.$$

Welche Einfluss auf die Anzahl der Lösungen hat  $b$ ?

15. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen ( $G = \mathbb{Q}$ ):

- $|x - 3| = 1$
- $|x - 2,75| = 1,25$
- $|x - 3,75| = 1,25$
- $||x - 1| - 2| = 3$

16. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a)  $|x - 7| = 12$       b)  $|x - 5| = 12$   
c)  $|x - 7,38| = 5,42$     d)  $|x - 7,39| = 3,41$

17. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ( $G = \mathbb{Q}$ ):  $|x - 33,7| = 21,9$

18. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen ( $G = \mathbb{Q}$ ):

(a)  $\frac{5}{4} - x = 3,5$       (b)  $|3,5 - x| = 4$

19. Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge  $\mathbb{Q}$ :

(a)  $|z| + 8 = -6$       (b)  $|z| - 8 = 6$       (c)  $|x - 5| = 7$

20. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ( $G = \mathbb{Q}$ ):

$$2(x + 3)^2 - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)^2 = 100(1,2x - 0,6)(1,2x + 0,6) - \frac{1}{9}x^2 - 2x \left(71x - \frac{1}{6}\right)$$

21. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ( $G = \mathbb{Q}$ ):

$$(11x - 2)^2 - (7 - 9x)^2 = (6x + 13)^2 + (2x - 5)(2x + 5)$$

22. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen ( $G = \mathbb{Q}$ ):

(a)  $(2x - 5)(2x + 5) + (7 - 9x)^2 = (11x + 2)^2 - (6x + 13)^2$   
(b)  $(1 - 5x)^2 + 3x(8x + 3) = (7x - 1)^2 + 3(1 - x)$

23. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen ( $G = \mathbb{Q}$ ):

(a)  $(2x - 5)(2x + 5) + (7 - 9x)^2 = (11x + 2)^2 - (6x + 13)^2$   
(b)  $(1 - 5x)^2 + 3x(8x + 3) = (7x - 1)^2 + 3(1 - x)$

24. Bestimme für folgende Gleichung die Lösung über  $\mathbb{Q}$ :

$$(2 - x)^2 + 2 \cdot (4x - 2) - 5 \cdot (2 - x) = (x + 3)^2$$

25. Bestimme für folgende Gleichung die Lösung über  $\mathbb{Q}$ :

$$3 \cdot (4x - 2) + \left(1\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot (2 - 3x)$$

26. Löse folgende Gleichung ( $D = Q$ ):

$$(5x + 4)(5x - 4) - (2 - 2x)^2 = (4x - 1)^2 + (2x - 8)(4x + 2) - x(3x - 4)$$

27. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen zur jeweils angegebenen Grundmenge:

(a)  $17x - 13 = 22x + 7$ ,  $G = \mathbb{Q}$

(b)  $x - \frac{1}{4} = \frac{x}{7} + \frac{5}{4}$ ,  $G = \mathbb{Q}^+$

(c)  $13(x - x) = \frac{1}{x}$ ,  $G = \mathbb{N}$

(d)  $7(x - x) = 3 - \frac{21}{7}$ ,  $G = \mathbb{Z}$

(e)  $(x - 3)(x + 5) = 0$ ,  $G = \mathbb{Z}$

28. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen zur jeweils angegebenen Grundmenge:

(a)  $27x - 35 = 34x - 18$ ,  $G = \mathbb{Z}$

(b)  $x - \frac{1}{7} = \frac{8}{7} - \frac{x}{8}$ ,  $G = \mathbb{Q}^+$

(c)  $4x - 3 - 7x = 11 - 3x - 14$ ,  $G = \mathbb{N}$

(d)  $x^2 = -9$ ,  $G = \mathbb{Q}$

(e)  $(x + 4)(x - 1)(x - 2) = 0$ ,  $G = \mathbb{N}$