GYMNASIUM MIT SCHÜLERHEIM PEGNITZ
mathem.-technolog. u. sprachl. Gymnasium

WILHELM-VON-HUMBOLDT-STRASSE 7
91257 PEGNITZ
FERNRUF 09241/48333
FAX 09241/2564

Grundwissen Abitur — Stochastik

15. Juli 2012

1. Erkläre an einem Beispiel die Begriffe

(a)
- Ergebnisraum
- Mächtigkeit des Ergebnisraumes

(b)
- Ereignisraum
- Elementarereignisse
- sicheres Ereignis
- unmögliches Ereignis
- Gegenereignis

Lösung

(a)
- Alle möglichen Ergebnisse werden zu einer Menge Ω (genannt Ergebnisraum) zusammengefasst, z.B. $\Omega = \{1, 2, 3\}$
- Die Anzahl der Elemente $|\Omega|$ heißt Mächtigkeit des Ergebnisraumes.

(b)
- Der Ereignisraum ist die Menge aller Teilmengen des Ergebnisraumes:
  $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{\Omega}\}$
- Elementarereignisse: $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$, $\omega_3 = \{3\}$
- sicheres Ereignisse: Ω
- unmögliches Ereignisse: $\emptyset$
- Gegenereignis $\overline{E}$ zu einem Ereignis E:
  $E = \{3\} \Rightarrow \overline{E} := \Omega \setminus E = \{1, 2\}$

—

2. Erkläre an einem Beispiel mit zwei Ereignissen A und B die mengenalgebraischen Begriffe

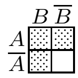
(a) A oder B.

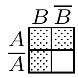
(b) Mindestens eines der Ereignisse A oder B.

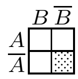
(c) Weder A noch B.

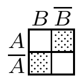
(d) Entweder A oder B.

Lösung $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$.

(a)  Ω $A \cup B = \{2, 3, 4\}$

(b)  Ω $A \cup B = \{2, 3, 4\}$

(c)  Ω $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{1\}$

(d)  Ω $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \{3, 4\}$

—

3.(a) Was versteht man unter der relativen Häufigkeit eines Ereignisses A?

(b) Welche Eigenschaften besitzt die relative Häufigkeit (wenn man sie als Funktion betrachtet)? Beispiele!

(c) Welche Eigenschaften besitzt das Wahrscheinlichkeitsmaß P über einem Ergebnisraum Ω? Beispiele!

Lösung

(a) Tritt ein Ereignis A bei n Versuchen genau k-mal ein, so heißt $h_n(A) := \frac{k}{n}$ die relative Häufigkeit von A in dieser Versuchsfolge.

(b)
- $0 \leq h_n(A) \leq 1$, $h_n(\emptyset) = 0$ und $h_n(\Omega) = 1$.
- Die relative Häufigkeit $h_n(A)$ eines möglichen Ereignisses A ist gleich der Summe der rel. Häufigkeiten der zugehörigen Elementarereignisse ω.
- $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$
- Für disjunkte Ereignisse A und B gilt
  $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$
- $h_n(\overline{A}) = 1 - h_n(A)$

(c) Die gleichen wie die relative Häufigkeit. Ersetze also in der Lösung von Teilaufgabe (b) jedes h_n durch P.

4.(a) Was ist eine Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsverteilung?

(b) Welche Eigenschaft besitzt sie?

(c) Gib zwei nicht primitive Anwendungsbeispiele an.

Lösung

(a) Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, bei der jedes Elementarereignis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vorkommt, heißt LAPLACE'sche Wahrscheinlichkeitsverteilung.

(b)
- Für jedes Elementarereignis ω gilt $P(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$.
- Für jedes Ereignis A gilt

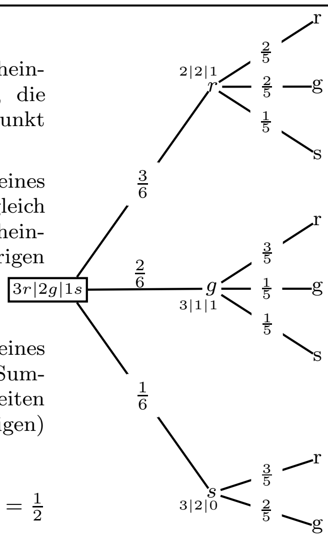
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}.$$

(c) Wird ein L-Würfel viermal geworfen, ist die Wahrscheinlichkeit
- vier unterschiedliche Augenzahlen zu werfen, gleich $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} \approx 27,7\%$.
- eine Quersumme kleiner als 6 zu werfen, gleich $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1+4}{6^4} \approx 3{,}85 \cdot 10^{-3}$.

5. Welche Gesetzmäßigkeiten an Wahrscheinlichkeitsbäumen gibt es? Beispiele!

Lösung

- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem zugehörigen Pfad (1. Pfadregel).
  Z.B. $\mathrm{P}(gs) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen (vollständigen) Pfade (2. Pfadregel).
  Beispiel:
  $\mathrm{P}(xr) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$



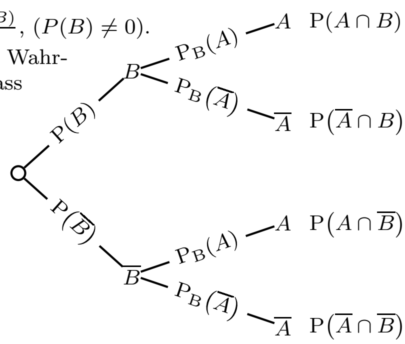
6.(a) Was versteht man anschaulich unter der bedingten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung B? Beispiel!

(b) Nenne die allgemeine Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit und erkläre ihren Zusammenhang mit einem Baumdiagramm.

Lösung

(a) Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis A an, wenn man schon weiß, dass Ereignis B eingetreten ist. Wenn z.B. gilt:
A: „6 richtige im Lotto" und B: „5 richtige im Lotto",
dann ist $P_B(A) := \frac{1}{44}$.

(b) $P_B(A) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $(P(B) \neq 0)$.
$P(A \cap B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse A und B eintreten.



7.(a) Wann heißen zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig?

(b) Wie kann man die Unabhängigkeit am schnellsten überprüfen?

(c) Gib je ein Beispiele an, so dass die Ereignisse stochastisch abhängig bzw. unabhängig sind.

Lösung

(a) Zwei Ereignisse A und B in Ω heißen (stochastisch) unabhängig, wenn

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

(b) Die Vierfelder-Tafel muss eine Multiplikationstafel sein, d.h. die Wahrscheinlichkeit, die in einem (und damit jedem) der vier inneren Feldern steht, ist gleich dem Produkt der dazugehörigen Randwahrscheinlichkeiten.

(c) Doppelter Würfelwurf
A_i : 6 bei Wurf Nummer i, B : Augensumme 12

- unabhängig: A_1 und A_2
- abhängig: A_1 und B

8.(a) Erkläre an einem Beispiel, wie man den Erwartungswert, die Varianz (letztere auf zwei Arten) und die Standdardabweichung berechnen kann.

(b) Wie kann man den Erwartungswert geometrisch darstellen?

(c) Welche Information über eine Zufallsgröße gibt die Varianz?

Lösung

(a)

x	-4	0	2	3
$\mathrm{W}(x)$	$0,1$	$0,1$	0	$0,8$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}X = \mu &= -4 \cdot 0,1 + 0 + 0 + 3 \cdot 0,8 = 2 \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathcal{E}(X-\mu)^2 \\
\mathrm{Var}(X) &= 36 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 + 0 + 1 \cdot 0,8 = 4,8 \\
\sigma X &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 2,19.
\end{aligned}$$

(b) Im Histogramm ist der Erwartungswert die zur y-Achse parallele Schwerlinie der Verteilung.

(c) Die Varianz gibt die Streuung einer Zufallsgröße an. Je mehr "Gewicht" weit vom Erwartungswert entfernt ist, desto größer ist die Varianz der Zufallsverteilung.

9.(a) Was ist ein Bernoulli-Experiment?

(b) Was ist eine Bernoulli-Kette?

(c) Gib ein Beispiel für eine Bernoulli-Kette, das kein Urnenexperiment ist, und benenne die auftretenden mathematischen Größen.

(d) Beschreibe das Beispiel aus 9c als Urnenexperiment.

(e) Wandle das Beispiel aus 9d so ab, dass es kein Bernoulli-Experiment ist.

Lösung

(a) Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment, das genau zwei verschiedene Ausgänge besitzt (z.B. T-N, 1-0, z-w). Die Wahrscheinlichkeit für T sei p.

(b) Eine Bernoulli-Kette der Länge n ist das n-malige Ausführen eines bestimmten Bernoulli-Experiments.

(c) 7-maliges Werfen eines Laplace-Würfels.
BG: Folge der Ereignisse 6 $\overline{6}$;
Treffer: 6, $n = 7$, $p = \frac{1}{6}$

(d) Urne mit 6 Kugeln (1,...,6), 7-maliges ziehen einer Kugel mit Zurücklegen.

(e) Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen.

10.(a) Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von k Treffern in einer Bernoulli-Kette?

(b) Wie kann man das kurz ausdrücken?

(c) Wie findet man häufig auftretende Werte für B-verteilte Zufallsgrößen?

(d) Wie berechnet man den Erwartungswert und die Varianz einer Binomialverteilung?

(e) Wie bestimmt man $\mathrm{P}(X \le k)$, $\mathrm{P}(X \ge k)$, $\mathrm{P}(a \le X \le b)$ bei binomial verteilten Zufallsgrößen?

Lösung

(a) $\mathrm{P}(X = k) = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \mathrm{p}^{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n-k}}, \quad \mathrm{q} = 1 - \mathrm{p}.$

(b) Man sagt, die Wahrscheinlichkeit einer Bernoulli-Kette ist binomial verteilt und schreibt
$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{B}(n; p; k).$

(c) im Tafelwerk

(d) EX=np; Var(X)=npq;

(e) Mit der Spalte für die kumulative Binomialverteilung des Tafelwerkes
$\mathrm{P}(X \le k)=\mathrm{F}(n;p;k)$
$\mathrm{P}(X \ge k)=1-\mathrm{F}(n;p;k-1)$
$\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{F}(n;p;b)-\mathrm{F}(n;p;a-1)$

11. Erkläre an einem Beispiel die Begriffe

- Alternativ-Test,
- Entscheidungsregel,
- Fehlerwahrscheinlichkeit.

Lösung Gegeben sind zwei Güteklassen für Glühbirnen. Alternativen: A: p=0,90; B: p=0,70. Eine Stichprobe der Länge 20 soll Aufschluss geben, um welche Güteklasse es sich bei einer Lieferung handelt. Festlegung der Entscheidungsregel: Falls $\left\{ \begin{array}{c} X \ge 17: \\ X \le 16: \end{array} \right\}$ Entscheidung $\left\{ \begin{array}{c} \text{für A} \\ \text{für B} \end{array} \right\}$. Zufallsbedingt könnte die Stichprobe aber nicht repräsentativ für eine der Alternativen ausfallen. So erhält man die Fehlerwahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(F_A)$ und $\mathrm{P}(F_B)$ dafür, dass man fälschlicherweise aufgrund der Stichprobe an die falsche Alternative glaubt.

E-Tafel	$A: p = 0,9$	$B: p = 0,7$
$X \ge 17$	☺	F_B
$X \le 16$	F_A	☺

$\mathrm{P}(F_A) = \mathrm{P}_{0,9}(X \le 16) = \{\text{wenn B-Exp.,TW}\} = 13,4\%$
$\mathrm{P}(F_B) = \mathrm{P}_{0,7}(X \ge 17) = \{\text{wenn B-Exp.,TW}\} = 10,7\%$

12. Erkläre an einem Beispiel, wie man bei einem Hypothesentest eine Entscheidungsregel zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau bestimmt.

Lösung Eine Firma behauptet, dass mehr als 90% der produzierten Bauteile funktionieren. Es soll eine Entscheidungsregel gefunden werden, die die Nullhypothese $H_0 : p. \le 90\%$ auf einem Signifikanzniveau von 5% bei einem Stichprobenumfang von 200 Teilen testet.

E-Tafel	$H_0 : p \le 0,9$	$\overline{H_0} : p > 0,9$
$X \le k$	☺	F_{II}
$X \ge k+1$	F_I	☺

$\underbrace{\mathrm{P}(F_I)}_{\alpha} = 1 - \mathrm{P}(X \le k) = 1 - \mathrm{P}_{0,9}(X \ge k) \le 0,05.$

Aus dem Tafelwerk erhält man k=187.
Also gilt
Annahmebereich: $A = \{0, 1, \ldots, 187\}$
Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{188, 189, \ldots, 200\}$