GYMNASIUM MIT SCHÜLERHEIM PEGNITZ
mathem.-technolog. u. sprachl. Gymnasium

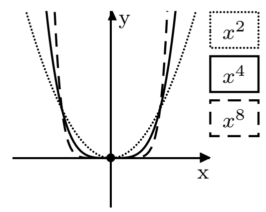
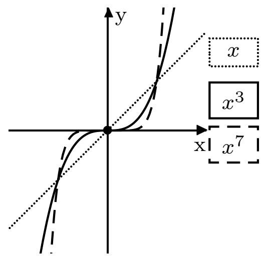
WILHELM-VON-HUMBOLDT-STRASSE 7
91257 PEGNITZ
FERNRUF 09241/48333
FAX 09241/2564

Grundwissen Abitur — Analysis

15. Juli 2012

1. Was sind Potenzfunktion mit natürlichen Exponenten? Welche Eigenschaften besitzen sie? Beschreibe die Graphen.

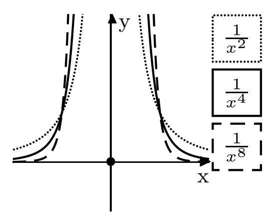
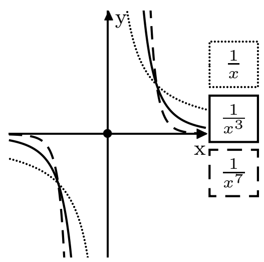
Lösung $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ heißt n-ten Potenzfunktion, der dazugehörige Graph G_f heißt Parabel n-ter Ordnung.

n gerade	n ungerade
	
$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$ G_f parabelartig, liegt im I und II Quadranten G_f ist y-achsensymm. $(\pm1 \mid 1)$, $(0 \mid 0) \in G_f$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ G_f sesselartig, liegt im I und III Quadranten G_f pkt.-symm zu $(0 \mid 0)$ $(\pm1 \mid \pm1)$, $(0 \mid 0) \in G_f$

Je größer n, desto „kantiger" der Graph.

2. Was sind Potenzfunktion mit negativen ganzzahligen Exponenten? Welche Eigenschaften besitzen sie? Beschreibe die Graphen.

Lösung $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ heißt n-ten Potenzfunktion mit negativem ganzzahligem Exponenten, der dazughörige Graph G_f heißt Hyperbel n-ter Ordnung.

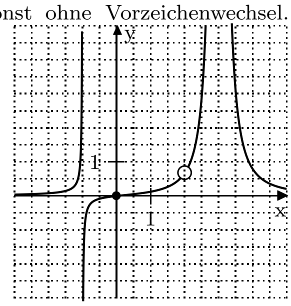
n gerade	n ungerade
	
$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$ G_f liegt im I und II Quadranten G_f ist y-achsensymm. $(\pm1 \mid 1) \in G_f$	$\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ G_f liegt im I und III Quadranten G_f pkt.-symm zu $(0 \mid 0)$ $(\pm1 \mid \pm1) \in G_f$

Je größer n, desto „kantiger" der Graph.

3. Was versteht man bei einer gebrochen rationalen Funktion unter einer Polstelle? Wie sieht ihr Graph an diesen Stellen aus?

Lösung Falls sich bei einer gebrochen rationalen Funktion der Faktor $(x - c)$ im Nenner durch Kürzen nicht beseiten lässt, hat man eine Polstelle bei $x = c$. Der Graph geht dort gegen $\pm\infty$. Falls die Polstelle ungeradzahlige Ordnung hat, mit Vorzeichenwechsel, sonst ohne Vorzeichenwechsel.

Beispiel
$f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)(x-3)^2}$



- $x = -1$:
  Pol 1.Ordnung (VZW)
- $x = 3$:
  Pol 2.Ordnung (kein VZW)
- $x = 2$:
  keine Polstelle sondern eine sog. stetig hebbare Definitionlücke.

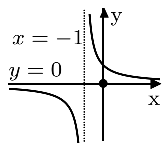
4. • In welchen Situationen treten waagrechte und senkrechte Asymptoten bei gebrochen rationalen Funktionen auf. Wie kann man sie bestimmen?

• Gib ein Beispiel für eine Funktion mit schräger Asymptote und begründe, warum eine schräge Asymptote vorhanden ist.

Lösung Die Koeffizienten der höchsten x-Potenz im Zähler und Nennen seien a bzw. b.

Art der Asymptote	Tritt auf	Best.
senkrecht	an Polstelle c	$x = c$
waagrecht, x-Achse	Z-Grad<N-Grad	$y = 0$
waagrecht, nicht x-Achse	Z-Grad=N-Grad	$y = \frac{a}{b}$

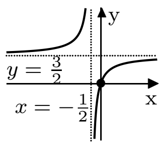
$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x+1}$



waagr.: $y = 0$

senkr.: $x = -1$

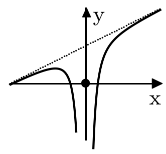
$\mathrm{f}(x) = \frac{3x}{2x+1}$



waagr.: $y = \frac{3}{2}$

senkr.: $x = -\frac{1}{2}$

$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{x^2}$



schräg: $y = \frac{1}{2}x + 2$

weil $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

5. Was versteht man unter

(a) dem Differentialquotienten?

(b) Welche zwei anderen Bezeichnungen hat der Differentialquotient noch?

(c) Welche geometrische Bedeutung hat er?

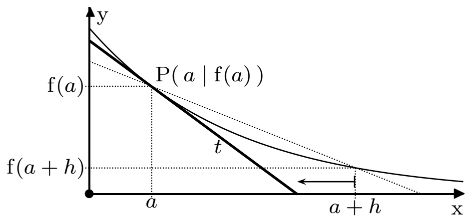
Lösung

Sei f eine auf einem Intervall $\mathbb{I}$ definierte Funktion, dann heißt

(a) der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{f}(a+h) - \mathrm{f}(a)}{h}$ Differenzialquotient von f an der Stelle a.

(b) Er wird auch als Ableitung $\mathrm{f}'(a)$ oder lokale Änderungsrate von f an der Stelle a bezeichnet.

(c) Der Differentialquotient gibt die Steigung der Tangente t durch den Punkte $\mathrm{P}(\, a \mid \mathrm{f}(a)\,)$ an.



6.(a) Wie lauten die Ableitungsfunktionen der Potenzfunktionen?

(b) Erkläre an einem Beispiel, wie man die Gleichung und den Neigungswinkel der Tangente einer Funktion $\mathrm{f}(x)$ im Punkt $\mathrm{P}(\, a \mid p_y\,)$ bestimmt.

Lösung

(a)

$\mathrm{f}(x)$	$\mathrm{f}'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}

(b) Beispiel: Tangente von $\mathrm{f}(x) = \mathrm{x}^3$ in $\mathrm{P}(\, 2 \mid p_y\,)$.

$p_y = \mathrm{f}(2) = \ldots = 8; \quad \mathrm{f}'(x) = 3\mathrm{x}^2 \Rightarrow \mathrm{f}'(2) = 12$

allg. Geradengleichung $y = mx + t$

$m = \mathrm{f}'(2) = 12; \quad \mathrm{t} = \mathrm{y} - \mathrm{mx} \overset{m,P}{=} 8 - 12 \cdot 2 = -16$

$\underline{\underline{y = 12x - 16}}$

$\tan\alpha = \mathrm{f}'(2) = 12 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 85°}}$

7.(a) Wie wird eine Funktion $f(x) = c \cdot u(x)$ $(c \in \mathbb{R})$ abgeleitet, wie die Summe zweier Funktionen? Beispiel.

(b) Was versteht man unter den höheren Ableitungen einer Funktion? Beispiel!

(c) Was versteht man unter der Stammfunktion einer Funktion? Beispiele!

Lösung

(a) $f(x) = c \cdot u(x)$ wird abgeleitet indem man $u(x)$ ableitet und die Konstante beibehält. Die Ableitung der Summe zweier Funktionen ist die Summe der Ableitungen.
Beispiel: $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 4x - 9$

(b) Höhere Ableitungen von Funktionen sind die Ableitungen der Ableitungen der Funktion. Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 + 2x^2 - 9x & f'''(x) &= 72x \\ f'(x) &= 12x^3 + 4x - 9 & f^{(4)}(x) &= 72 \\ f''(x) &= 36x^2 + 4 & f^{(5)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

(c) Eine Stammfunktion $F(x)$ von f ist die Funktion, deren Ableitung f ist. Also $F'(x) = f(x)$.
Beispiel:
Z.B. hat $f(x) = 4x$ die Stammfunktionen
$F(x) = 2x^2$, $F(x) = 2x^2 + 5$ oder $F(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}$.

8. Wie lauten die Ableitungsregeln für

(a) das Produkt zweier Funktionen?

(b) den Quotienten zweier Funktionen?

(c) die Verkettung zweier Funktionen?

Beispiele!

Lösung

(a) $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
Beispiel: $f(x) = x^2 \cdot x^5$
$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot x^5 + x^2 \cdot 5x^4 = 7x^6$

(b) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
Merke $\frac{NAZ - ZAN}{N^2}$
Beispiel: $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$
$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^3-1) \cdot 2x - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = -\frac{x^4 + 2x}{(x^3-1)^2}$

(c) $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Merke „Äußere ableiten, innere stehen lassen mal Innere abgeleitet.“
Beispiel: $f(x) = (x^3 - 4)^{11}$
$\Rightarrow f'(x) = 11(x^3 - 4)^{10} \cdot 3x^2$

9.

(a) Gib eine hinreichende Voraussetzung an, so dass f streng monoton steigend bzw. fallend in einem Bereich ist.

(b) Belege an einem Beispiel, dass die Voraussetzung aus 9a nicht notwendig ist.

(c) Nenne eine Funktion, für die $f'(x) > 0$, die aber nicht streng monoton steigt. Warum greift die hinreichende Voraussetzung von Frage 9a nicht?

Lösung

(a) Wenn in einem Intervall $\mathbb{I}$ für alle $x \in \mathbb{I}$ gilt: $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$, dann ist sie streng monoton steigend bzw. fallend.

(b) Für folgende beiden Funktionen gilt obige Voraussetzung nicht, sie sind aber trotzdem echt monoton:

- $f : x \mapsto x^3$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend, aber es ist $f'(0) = 0$.
- $f : x \mapsto x; \mathbb{D} = \mathbb{N}$ ist streng monoton steigend, aber nicht differenzierbar, weil sie ihr Graph nur aus einer Reihe einzelner Punkte besteht.

(c) $f(x) = -\frac{1}{x} (\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\})$; Hier ist zwar $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, aber $\mathbb{D}$ ist kein Intervall, so dass die Funktion an der Definitionslücke einen Sprung „machen kann“.

10. Erkläre an einem Beispiel wie man die Monotonieintervalle einer Funktion bestimmt und wie man daraus die Art der Waagrechtpunkte erhält.

Lösung

z.B. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}; \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

Vorzeichentabelle erstellen:

x		-1		0		1	
$f'(x)$	>0	0	<0	$-$	<0	0	>0
G_f	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	DefL	$\searrow$	TIP	$\nearrow$

Monotonieintervalle: G_f ist echt monoton

$$\left\{\begin{array}{c}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{array}\right\} \text{auf} \left\{\begin{array}{c}]-\infty;-1] \text{ und } [1;\infty[\\ [-1;0[\text{ und }]0;1]\end{array}\right\}$$

Bemerkungen:

- Wenn vor und nach der Waagrechtstelle die gleiche Monotonie auftritt, ist an der Waagrechtstelle ein Terrassenpunkt.
- Das Vorzeichen von f' erhält man z.B. durch einsetzen geeigneter Werte in f'.

11. Erkläre wie man das Krümmungsverhalten einer Funktion bestimmt und wie man daraus die Wendepunkte erhält.

Lösung Ist $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$, so heißt F_f links- bzw. rechtsgekrümmt.

Beispiel: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1 \Rightarrow f''(x) = \ldots = 12(x-1)(x+1)$

Krümmungstabelle: Kritische Stellen bei $f''(x) = 0$

x		-1		1	
$f''(x)$	>0	0	<0	0	>0
G_f	lgk	WP	rgk	WP	lgk

Krümmungsintervalle: G_f ist

$$\left\{\begin{array}{c}\text{links-}\\ \text{rechts-}\end{array}\right\} \text{gekrümmt auf} \left\{\begin{array}{c}]-\infty;-1] \text{ und } [1;\infty[\\ [-1;1]\end{array}\right\}$$

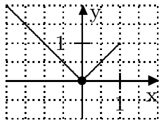
Bemerkung: Das Vorzeichen von f'' erhält man durch einsetzen geeigneter Werte in f''. Die Wendepunkte sind die Stellen, an denen sich die Krümmungsart ändert.

12. Sei f eine Funktion und $a \in \mathbb{D}$.
    (a) Gib eine hinreichende Voraussetzung an, so dass ihr Graph G_f an der Stelle a einen Hoch- (Tief-) Punkt besitzt.
    (b) Belege an drei unterschiedlichen Beispielen, dass die Voraussetzung aus 12a nicht notwendig ist.
    (c) Gib eine hinreichende Voraussetzung an, so dass ihr Graph G_f an der Stelle a einen Wende- (Terrassen-) Punkt besitzt.

Lösung

(a) • f zweimal differenzierbar in a, $f'(a) = 0$ und
$$\left\{\begin{array}{c}f''(a) < 0\\ f''(a) > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Hochpunkt}\\ \text{Tiefpunkt}\end{array}\right\}.$$

(b) •



$f(x) = |x|$ mit $\mathbb{D} = [-2;1]$ besitzt den Tiefpunkt $(0 \mid 0)$ sowie die Randextrema $(-2 \mid 2)$ und $(1 \mid 1)$, ist dort aber nicht differenzierbar, also kann dort auch die Ableitung nicht Null sein.

- $f(x) = x^4$ besitzt den Tiefpunkt $(0 \mid 0)$, es ist aber $f''(0) = 0$.

(c) Ist f dreimal differenzierbar in a und $f''(a) = 0$ sowie $f'''(a) \neq 0$, dann besitzt $f(x)$ bei a einen Wendepunkt.
Gilt zusätzlich $f'(a) = 0$, dann ist dieser Wendepunkt sogar Terrassenpunkt.

13. Wozu wird das Newton-Verfahren verwendet, wie funktioniert es?

Lösung Das Newton-Verfahren liefert Näherungslösungen für Nullstellen von Funktionen.
Man wählt dabei durch gezieltes Schätzen einen Startwert x_1 der nahe bei einer Nullstelle liegt.
Mit Hilfe der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mathrm{f}(x_n)}{\mathrm{f}'(x_n)} \ (\mathrm{f}'(x_n) \neq 0)$$

erhält man eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ deren Grenzwert eine Nullstelle von f ist.

14.(a) Wie lang ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge a?

(b) Wie lang ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a?

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Gradmaß α und dem Bogenmaß φ eines Winkels?

(d) Wie groß sind sin, cos und tan und das Bogenmaß φ von 0°, 30°, 45°, 60° und 90°?

Lösung

(a) $\sqrt{2}a$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

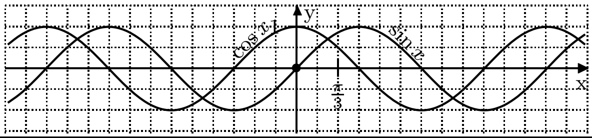
(c) $\frac{\alpha}{180°} = \frac{\varphi}{\pi}$

(d)

α	0°	30°	45°	60°	90°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

15. Welche Eigenschaften besitzen die sin- und die cos-Funktion?

Lösung



sin-Funktion	cos-Funktion
Nullstellen: $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\sin(-x) = -\sin(x)$ (punktsym. zum Ursprung) $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$	Nullstellen: $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\cos(-x) = \cos(x)$ (achsensym. zur y-Achse) $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Periode 2π
Wertemenge $[-1; 1]$

16. Wie lauten die Ableitungsfunktionen

- der Sinus- und der Kosinusfunktion-,
- der Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten? Sonderfälle!

Lösung

$\mathrm{f}(x)$	$\mathrm{f}'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
x^r	rx^{r-1}
Spezialfälle	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(r = \frac{1}{2})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$ $(r = -1)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$ $(r = -2)$
$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$ $(r = -3)$

17.(a) In welchen Fällen besitzt eine Funktion eine Umkehrfunktion?

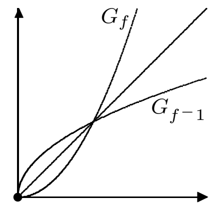
(b) Erkläre an einem Beispiel, wie man rechnerisch und graphisch von einer gegebenen Funktion die Umkehrfunktion bestimmt.

Lösung

(a) Eine Funktion f ist umkehrbar, wenn es keine zwei x-Wert gibt, die den gleichen y-Wert besitzen, oder anschaulich gesprochen, wenn jede Parallele zur x-Achse den Graphen von f höchstens einmal schneidet.

(b) Beispiel: $\mathrm{f}(x) = \mathrm{x}^2; \mathbb{D}_\mathrm{f} = \mathbb{R}_0^+, \mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.

- rechnerisch: x und y in der Funktionsgleichung vertauschen und nach y auflösen.
  $x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}; \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.
- graphisch: Den Graphen G_f von f an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten spiegeln.



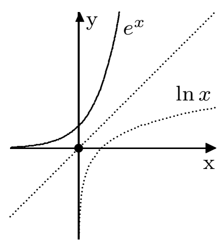
18.(a) Was versteht man und der natürlichen Exponentialfunktion?

(b) Welche Eigenschaften besitzt sie?

Lösung

(a) Der Funktionsterm der natürliche Exponentialfunktion heißt $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^\mathrm{x}$. Dabei ist $e \approx 2,71828$ die sog. Euler'sche Zahl.

(b)
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
- $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$
- Nullstellen: keine



- Ableitung: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- Stammfunktionen: $\int e^x\,dx = e^x + C$
- Die e-Funktion ist die Umkehrfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion.

19.(a) Welche Potenzrechenregeln gibt es? Anwendungsbeispiele!

(b) Löse $e^x = y$ nach x auf. Anwendungsbeispiele (z.B. $e^{\frac{1}{x-1}} = y$ nach x auflösen)!

Lösung

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

- $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
  $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
  $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
  $(e^x)^y = e^{xy}$
- $e^{\ln x} = x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$
  $\ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y \quad (y \in \mathbb{R}^+)$

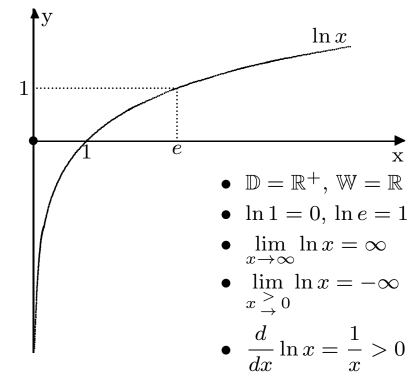
20.(a) Wie ist die natürliche Logarithmusfunktion definiert?

(b) Welche Eigenschaften hat sie?

Lösung

(a) Die natürliche Logarithmusfunktion $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.

(b) • Graph



- $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$
- $\dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x} > 0$
- $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

21.(a) Welche Logarithmusrechenregeln gibt es? Anwendungsbeispiele!

(b) Löse $\ln x = y$ nach x auf. Anwendungsbeispiele (z.B. $\ln(\frac{1}{x-1}) = y$ nach x auflösen)!

Lösung

(a) Für alle $x, y > 0$ ist

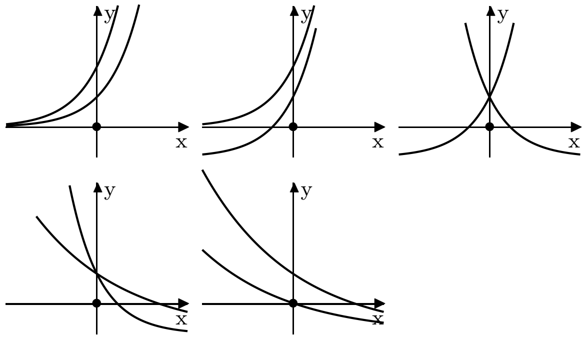
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x) \quad (r \in \mathbb{R})$
- $\ln e^r = r \quad (r \in \mathbb{R})$

(b) $\ln x = y \Longleftrightarrow x = e^y$

22. Beschreibe an einem Beispiel, wie sich der Term einer Funktionen verändert, wenn man den dazugehörigen Graph im Koordinatensystem verschiebt oder verzerrt.

Lösung $f(x) = e^x$

Streckung um Faktor 2 in y-Richtung:	$g(x) = 2e^x$
Verschiebung um 1 nach unten:	$h(x) = 2e^x - 1$
Spiegelung an der y-Achse:	$j(x) = 2e^{-x} - 1$
Streckung um Faktor 3 in x-Richtung:	$k(x) = 2e^{-\frac{x}{3}} - 1$
Verschiebung um 2 nach links	$l(x) = 2e^{-\frac{x+2}{3}} - 1$



23. Welche Sachaufgaben lassen sich mit Exponentialfunktionen beschreiben? Welche Bedeutung haben die Parameter? Beispiel!

Lösung Prozentuale Wachstums- und Zerfallsvorgänge, also auch Zinseszins-Rechnungen.
Beispiel: Eine Population K wächst/schrumpft pro Jahr um $p\%$. Wie groß ist sie nach n Jahren?
Für die Population $K(n)$ nach n Jahren gilt dann

$$K(n) = K\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n.$$

Z.B. wächst die Weltbevölkerung von $6,5$ Mrd. Menschen derzeit um $1,2\%$. In 50 Jahren würden dann

$$K(50) = 6,5 \cdot 1,012^{50} \approx 11,8 \text{ Mrd.}$$

Menschen auf der Erde leben.

24. Beschreibe allgemein, welche Eigenschaften bestimmte Integrale besitzen. Anwendungsbeispiele!

Lösung

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

z.B. ist $\int_a^b x^2 - 2x + 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_a^b$.

25.(a) Was versteht man unter der Integralfunktion einer Funktion f? Welche Eigenschaften besitzen alle Integralfunktionen? Wie kann man das mathematisch formulieren?

(b) Gib (mit Begründung) ein Beispiel für eine Stammfunktion, die nicht als Integralfunktion dargestellt werden kann.

Lösung

(a) Für jede Funktion f, die auf einem Intervall $\mathbb{D}$ stetig ist, heißt die Funktion

$$\mathrm{F_a}(x) := \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)\,dt};\ \mathrm{a, x} \in \mathbb{D}$$

Integralfunktion von f mit dem Stützpunkt a.
Der Stützpunkt ist stets Nullstelle von F_a, d.h. $F_a(a) = 0$.

(b) $\mathrm{F}(x) = \mathrm{x}^2 + 1$ kann nicht als Integralfunktion dargestellt werden, weil sie kein Nullstelle hat.

26. Wie lautet die Kernaussage des HDI? Anwendungsbeispiele!

Lösung

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$

Leitet man eine Integralfunktion F ab, so erhält man die Integrantenfunktion $\mathrm{f}(x)$.
Anwendungsbeispiel: Zeige, dass $\mathrm{F}(x) = \mathrm{x} \cdot \sin \mathrm{x}$ Stammfunktion von $\mathrm{f}(x) = \sin \mathrm{x} + \mathrm{x} \cdot \cos \mathrm{x}$ ist und berechne damit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x + x \cdot \cos x\,dx.$$

Lösung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x + x \cdot \cos x\,dx = \{\mathrm{HDI}\} = [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots$$

27. Was versteht man unter dem unbestimmten Integral einer Funktion? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Integralfunktionen von f und den Stammfunktionen von f? Nenne einige wichtige unbestimmte Integrale.

Lösung Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt unbestimmtes Integral von f. Integralfunktion von f sind genau die Stammfunktionen von f, die mindestens eine Nullstelle besitzen.
Beispiele für unbestimmte Integrale (in der üblichen Kurzschreibweise):

- $\int dx = x + C;\quad \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x^n}\,dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C,\ n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;\ \int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

28. Was versteht man unter positiver bzw. negativer Integrationsrichtung? Welche Auswirkung hat die Umkehrung der Integrationsrichtung auf den Wert eines bestimmten Integrals?
Gib (falls möglich) jeweils ein Beispiel für folgende Situationen:

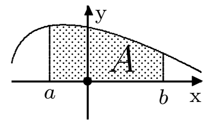
	Integrationsrichtung	Integrantenfunktion	Wert des Integrals
1.	positiv	negativ	negativ
2.	negativ	negativ	negativ
3.	negativ		0

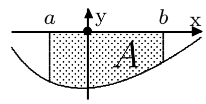
Lösung Die Integrationsrichtung ist positiv bzw. negativ, wenn die obere Integrationsgrenze größer bzw. kleiner als die untere Integrationsgrenze ist. Kehrt man die Integrationsrichtung um, so ändert der Wert des Integrals sein Vorzeichen ($\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx} = -\int_\mathrm{b}^\mathrm{a} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx}$).

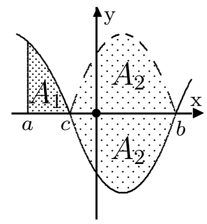
1. $\mathrm{f}(x) = -1, \mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = 2$
2. geht nicht
3. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{x}, \mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = -1$ (Flächenbilanz ist Null)

29. Beschreibe allgemein, wie man den Flächeninhalt berechnen kann, der von einer Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird. Welche Fälle können auftreten? Anwendungsbeispiele!

Lösung

- 

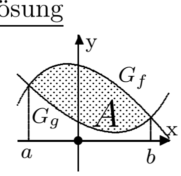
$$A = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx}$$
- 

$$A = -\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx}$$
- 

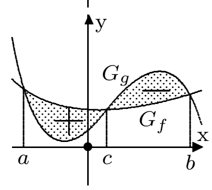
$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |\mathrm{f}(x)|\,\mathrm{dx} = \\ &= \int_a^c \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx} - \int_\mathrm{c}^\mathrm{b} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \left|\int_a^c \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx}\right| + \left|\int_c^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx}\right| \end{aligned}$$

30. Beschreibe allgemein, wie man den Flächeninhalt berechnen kann, der von zwei Funktionen eingeschlossen wird.

Lösung



$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dx} - \int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \int_a^b [\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)]\,\mathrm{dx} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= \int_a^c [\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)]\,\mathrm{dx} + \int_\mathrm{c}^\mathrm{b} [\mathrm{g}(x) - \mathrm{f}(x)]\,\mathrm{dx} = \\ &= \left|\int_a^c [\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)]\,\mathrm{dx}\right| + \left|\int_c^b [\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)]\,\mathrm{dx}\right| \end{aligned}$$