GYMNASIUM MIT SCHÜLERHEIM PEGNITZ
mathem.-technolog. u. sprachl. Gymnasium

WILHELM-VON-HUMBOLDT-STRASSE 7
91257 PEGNITZ
FERNRUF 09241/48333
FAX 09241/2564

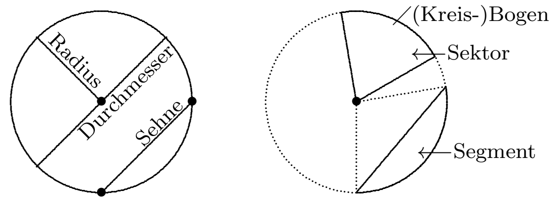
Grundwissen Mathematik JS 10 — Geometrie

7. Juli 2012

1. Definiere die wichtigesten Strecken und Kreisteile, die im Zusammenhang mit Kreisen auftreten können.

Lösung

- Eine Sehne ist die Stecke zwischen zwei beliebigen Kreispunkten. Eine Sehne, die durch den Kreismittelpunkt geht, heißt Durchmesser. Eine Strecke, die den Kreismittelpunkt mit einem Punkt der Kreislinie verbindet, heißt Radius.
- Ein zusammenhängender Teil der Kreislinie heißt Kreisbogen. Die Flächenfigur, die vom Kreisbogen und
  { der Sehne durch die Endpunkte des Kreisbogens / den Radien in den Endpunkten des Kreisbogens }
  eingeschlossen wird heißt { Segment / Sektor }.



—

2. Wie lauten die Grundformeln für
   (a) den Durchmesser d, den Kreisumfang U und die Bogenlänge b (Spezialfälle),
   (b) die Kreisfläche A und die Sektorfläche A_S (Spezialfälle)?

   eines Kreises

Lösung

(a)
- $d = 2r$
- $U = 2r\pi$
- $b = \dfrac{\alpha}{180^\circ} r\pi$

Spezialfälle:
Halbkreis: $b = r\pi$ Drittelkreis: $b = \frac{2}{3}r\pi$
Viertelkreis: $b = \frac{1}{2}r\pi$ Sechstelkreis: $b = \frac{1}{3}r\pi$

(b)
- $A = r^2\pi$
- $A_S = \dfrac{\alpha}{360^\circ} r^2\pi$

Spezialfälle:
Halbkreis: $A = \frac{1}{2}r^2\pi$ Drittelkreis: $A = \frac{1}{3}r^2\pi$
Viertelkreis: $A = \frac{1}{4}r^2\pi$ Sechstelkreis: $A = \frac{1}{6}r^2\pi$

—

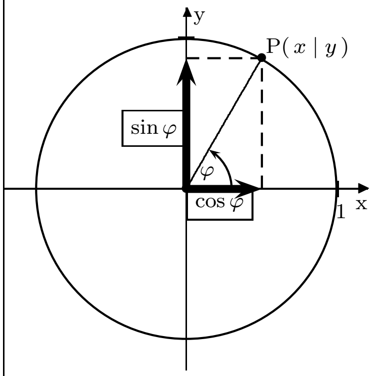
3.(a) Wie lauten die Formeln für das Volumen V und die Oberfläche S einer Kugel?
(b) Wie verändert sich die Oberfläche einer Kugel, wenn man ihren Radius um den Faktor 2, 3 $\dots m$ verändert?
(c) Wie verändert sich das Volumen einer Kugel, wenn man ihren Radius um den Faktor 2, 3 $\dots m$ verändert?
(d) Wie verändern sich die Oberfläche bzw. das Volumen eines beliebigen Körpers, wenn man ihn um den Maßstab $m \in \mathbb{R}$ streckt?
(e) Welchen mittleren Radius und welchen Äquatorial-Umfang besitzt die Erde?

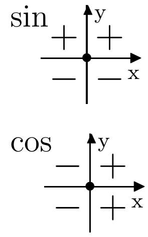
Lösung

(a) $V = \frac{4}{3}r^3\pi$
$S = 4r^2\pi$
(b) Die Oberfläche wächst quadratisch mit dem Radius, d.h. wird der Radius verdoppelt, verdreifacht, ver-m-facht, verändert sich die Oberfläche um den Faktor $4, 9, m^2$.
(c) Das Volumen wächst kubisch mit dem Radius, d.h. wird der Radius verdoppelt, verdreifacht, ver-m-facht, verändert das Volumen um den Faktor $8, 27, m^3$.
(d) Genau so wie eine Kugel.
(e) $r_E \approx 6\,370$km, $U_E \approx 40\,000$km

4.
- Wie werden die sin- und die cos-Funktion für beliebige Winkel definiert?
- Welches Vorzeichen haben sin und cos in den verschiedenen Quadranten?
- Nenne die wichtigsten Zusammenhänge zwischen sin und cos.

Lösung Man zeichnet um den Ursprung eines Koordinatensystem einen Einheitskreis. Für jeden Punkt $P(x \mid y)$ auf dem Einheitskreis ist die x-Koordinate gleich $\cos\varphi$ und die y-Koordinate gleich $\sin\varphi$. Dabei ist φ gleich dem Drehwinkel $\sphericalangle$(pos. x-Achse | $[OP]$).





$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

5.(a) Wie lang ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge a?

(b) Wie lang ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a?

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Gradmaß α und dem Bogenmaß φ eines Winkels?

(d) Wie groß sind sin, cos und tan und das Bogenmaß φ von 0°, 30°, 45°, 60° und 90°?

Lösung

(a) $\sqrt{2}a$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(c) $\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{\varphi}{\pi}$

(d)

α	0°	30°	45°	60°	90°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

6.(a) Wie lautet der Sinussatz (für beliebige Dreiecke)?

(b) Wie lautet der Kosinussatz (für beliebige Dreiecke)?

(c) Warum kann der Kosinussatz als Verallgemeinerung des Satz des Pythagoras betrachtet werden?

Lösung In einem Dreieck mit den Standardbezeichnungen gilt:

(a) $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

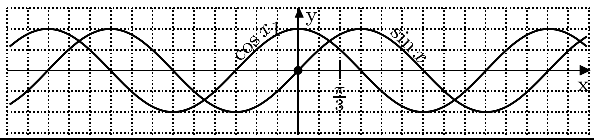
(b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

(c) Für $\gamma = 90^\circ$ ist $\cos\gamma = 0$ und damit $c^2 = a^2 + b^2$.

Algebra

7. Welche Eigenschaften besitzen die sin- und die cos-Funktion?

Lösung

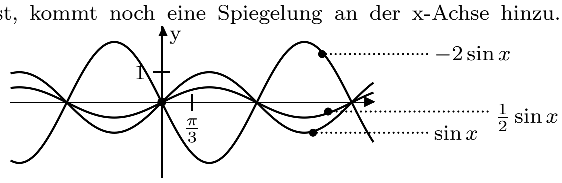


sin-Funktion	cos-Funktion
Nullstellen: $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)	Nullstellen: $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$
(punktsym. zum Ursprung)	(achsensym. zur y-Achse)
$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$	$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
Periode 2π	
Wertemenge $[-1; 1]$	

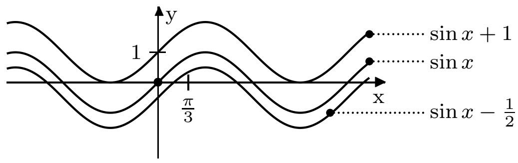
8. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Funktionen mit den Gleichungen
   (a) $y = \sin x$ und $y = a \sin x$?
   (b) $y = \sin x$ und $y = \sin x + d$?

Lösung

(a) $y = a \sin x$ ist gegenüber $y = \sin x$ um den Faktor $|a|$ entlang der y-Achse „gedehnt". Falls $a < 0$ ist, kommt noch eine Spiegelung an der x-Achse hinzu.



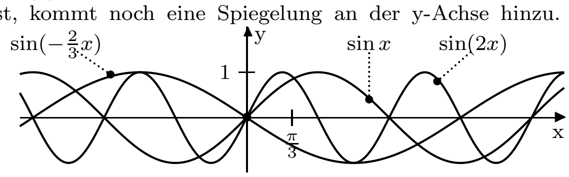
(b) $y = \sin x + d$ ist gegenüber $y = \sin x$ um den Betrag von d in y-Richtung verschoben. Falls $d < 0$ ist nach unten, falls $d > 0$ nach oben.



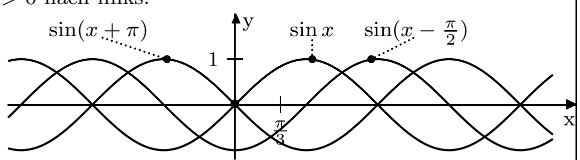
9. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Funktionen mit den Gleichungen
   (a) $y = \sin x$ und $y = \sin(bx)$?
   (b) $y = \sin x$ und $y = \sin(x + c)$?

Lösung

(a) $y = \sin(bx)$ ist gegenüber $y = \sin x$ um den Faktor $|b|$ entlang der x-Achse „gestaucht". Falls $b < 0$ ist, kommt noch eine Spiegelung an der y-Achse hinzu.



(b) $y = \sin(x + c)$ ist gegenüber $y = \sin x$ um den Betrag von c in x-Richtung verschoben. Falls $c < 0$ ist nach rechts, falls $c > 0$ nach links.



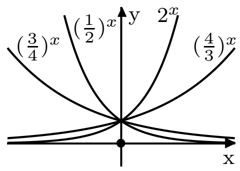
10.(a) Wie ist die allgemeine Exponentialfunktion definiert?

(b) Welche Eigenschaften besitzt die allgemeine Exponentialfunktion?

Lösung

(a) Die Funktion mit der Gleichung $y = a^x$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a.

(b)



- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
- Jeder Graph geht durch $(\,0 \mid 1\,)$
- $a^x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$
- Nullstellen: keine
- Spiegel man den Graph der Funktion a^x an der y-Achse, erhält man den Graph von $\left(\frac{1}{a}\right)^x$.
- Die x-Achse ist horizontale Asymptote des Graphen jeder Exponentialfunktion.

11.(a) Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es, wenn die Größe y mit der Größe x linear bzw. exponentiell wächst?

(b) Wie kann man im linearen und im exponentiellen Fall an der Funktionsgleichung erkennen, ob es sich um ein Wachsen oder ein Fallen handelt?

Lösung

(a)

lineares Wachstum	exponentielles Wachstum
Nimmt x um 1 Einheit zu, so wächst y stets den festen Summanden a.	festen Faktor a.
x: 0, 1, 2, 3; y: b, $b+a$, $b+2a$, $b+3a$	x: 0, 1, 2, 3; y: b, ba, ba^2, ba^3
Das Wachstum wird beschrieben mit der Gleichung $y = b + ax$	$y = b \cdot a^x$
dabei ist b gleich dem Bestand zum Zeitpunkt $x = 0$	
Der Graph ist eine Gerade mit der Steigung a.	Exponentialkurve mit der Basis a.

(b) Beim linearen Wachstum ist die Steigung a positiv bei der linearen Abnahme negativ. Beim exponentiellen Wachstum ist der Wachstumsfaktor (=Basis) a größer 1, beim Zerfall liegt er zwischen 0 und 1.

12. Welche Sachaufgaben lassen sich mit Exponentialfunktionen beschreiben? Welche Bedeutung haben die Parameter? Beispiel!

Lösung Prozentuale Wachstums- und Zerfallsvorgänge, also auch Zinseszins-Rechnungen.
Beispiel: Eine Population K wächst/schrumpft pro Jahr um $p\%$. Wie groß ist sie nach n Jahren?
Für die Population K(n) nach n Jahren gilt dann

$$\mathrm{K}(n) = \mathrm{K}\left(1 \pm \frac{\mathrm{p}}{100}\right)^{\mathrm{n}}.$$

Z.B. wächst die Weltbevölkerung von $6,5$ Mrd. Menschen derzeit um $1,2\%$. In 50 Jahren würden dann

$$\mathrm{K}(50) = 6,5 \cdot 1,012^{50} \approx 11,8 \text{ Mrd.}$$

Menschen auf der Erde leben.

13.(a) Was ist $\log_b k$?

(b) Welche Rechenregeln gelten für das Rechnen mit Logarithmen?

Lösung

(a) Für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $k \in \mathbb{R}^+$ ist $log_b k$ die Lösung der Gleichung $b^x = k$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $k, x, y > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ ist

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
  $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$
  $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x)$
- $\log_b b^r = r$
  $b^{\log_b r} = r$
- $b^r = k \Longleftrightarrow r = \log_b k$

14.(a) In welchem mathematischen Zusammenhang ist der Begriff „Halbwertszeit“ von Bedeutung?

(b) Wie berechnet man die Halbwertszeit eines Prozesses?

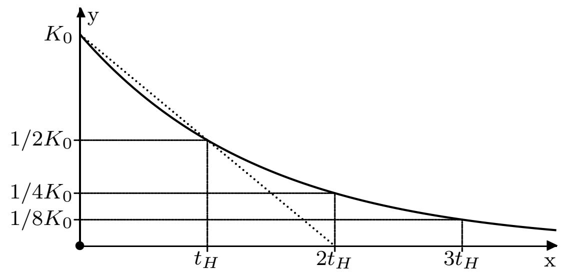
(c) Was ist falsch an der Aussage: „Ein radioaktives Präperat mit einer Halbwertszeit von 10 Tagen weist nach 20 Tagen keine radioaktive Strahlung mehr auf“?

Lösung

(a) Bei exponentiellen Zerfallsprozessen $\mathrm{K}(t) = \mathrm{K}_0 \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{t}}$ $(a < 1)$ versteht man darunter die Zeitspanne t_H, innerhalb welcher sich der Bestand jeweils halbiert.

(b) $t_H = \log_a 0,5$.

(c) Die Zerfallskurve ist keine fallende Gerade, sondern wird immer flacher. Nach 20 Tagen ist noch die Hälfte der Strahlung vorhanden, die nach 10 Tagen vorhanden war, also ein Viertel der Anfangsstrahlung.



15. Erkläre an einfachen Beispielen, wie man Exponential- und Logarithmusgleichungen auflöst.
Musterbeispiele:

- $3^{-2x+1} = 16$
- $2\lg x - \lg(x+2) = -1$

Lösung

- $$\begin{aligned} 3^{-2x+1} &= 16 && \text{Rechenbefehl } \log_3 \square \\ -2x+1 &= \log_3 16 && \text{auflösen nach } x \\ x &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log_3 16 && \text{Logarithmus vereinfachen} \\ x &= \tfrac{1}{2} - \log_3 \sqrt{16} \\ x &= \tfrac{1}{2} - \log_3 4 \end{aligned}$$

  Zur Sicherheit abschließend die Probe machen.

- $$\begin{aligned} 2\lg x - \lg(x+2) &= -1 && \text{log zusammenfassen} \\ \lg \tfrac{x^2}{x+2} &= -1 && \text{Rechenbefehl } a^{\square} \\ \tfrac{x^2}{x+2} &= 10^{-1} && \text{vereinfachen} \\ x^2 - 0,1x - 0,2 &= 0 && \text{vereinfachen} \\ x_1 &= 0,5 \\ < x_2 &= -0,4 > \end{aligned}$$

  Auf jeden Fall die Probe machen. $\Rightarrow \mathbb{L} = \{0,5\}$

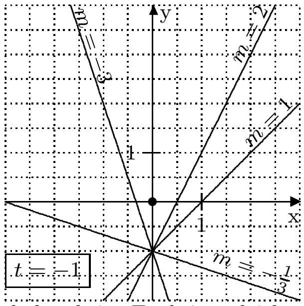
16.(a) Wie lautet die allgemeine Geradengleichung einer Gerade g. Wie bezeichnet man die Parameter?

(b) Welche Aussagen kann man über den Verlauf des Graphen einer linearen Funktion machen, wenn man nur die Funktionsgleichung kennt.

(c) Welche Geraden des Koordinatensystems lassen sich nicht durch die allgemeine Geradengleichung darstellen? Wie lauten ihre Zuordnungsgleichungen?

Lösung

(a) $y = mx + t$; m heißt Steigungsfaktor, t heißt y-Achsensabschnitt.



(b)
- Je größer $|m|$, desto steiler verläuft g.
- $\underline{m > 0:}$ g steigt nach rechts an.
  $\underline{m < 0:}$ g fällt nach rechts ab.
  $\underline{m = 0:}$ g verläuft parallel zur x-Achse.
- g schneidet die y-Achse im Punkt $T(0 \mid t)$.

(c) Die Parallelen zur y-Achse haben keine Funktionsgleichung weil zu jedem x-Wert ∞–viele y-Werte gehören. Ihre Zuordnungsgleichung lautet z.B. $x = 3$ oder $x = -\frac{1}{2}$.

17.(a) Wie kann man zu einer vorgegebenen Geradengleichung den dazugehörigen Funktionsgraphen finden? Gib zwei Möglichkeiten an.

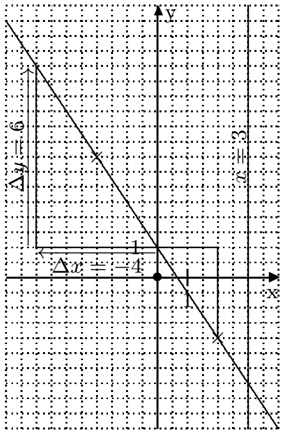
(b) Wie kann man die Zuordnungsgleichung einer Gerade aus ihrem Graphen bestimmen?

Lösung Beispiel: $y = -1.5x + 1$

(a)
- Mit Hilfe einer Miniwertetabelle sucht man zwei Punkte des Funktionsgraphen, die nicht zu eng aneinander liegen.

x	-2	2
y	4	-2

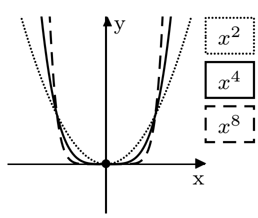
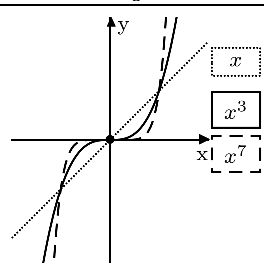
- y-Achsenabschnitt markieren $(+1)$ und ein nicht zu kleines Steigungsdreieck $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ anhängen. Steigungsdreiecke im Beispiel: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{2} = \frac{6}{-4} = \frac{3}{-2}$ (cm oder KäE)



(b) Wenn die Gerade parallel zur y-Achse verläuft, hat sie die Gleichung x =“Nullstelle“, wenn nicht, so liest man am y-Achsenabschnitt t ab und berechnet mittels Steigungsdreieck $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

18. Was sind Potenzfunktion? Welche Eigenschaften besitzen sie? Beschreibe die Graphen.

Lösung $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ heißt n-ten Potenzfunktion, der dazughörige Graph G_f heißt Parabel n-ter Ordnung.

n gerade	n ungerade
	
$\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$ G_f parabelartig, liegt im I und II Quadranten G_f ist y-achsensymm. $(\pm 1 \mid 1)$, $(0 \mid 0) \in G_f$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ G_f sesselartig, liegt im I und III Quadranten G_f pkt.-symm zu $(0 \mid 0)$ $(\pm 1 \mid \pm 1)$, $(0 \mid 0) \in G_f$

Je größer n, desto „kanntiger“ der Graph.

19. Was ist eine quadratische Funktion? Wie bestimmt man ihre Achsenabschnitte, ihren Scheitelpunkt, ihre Normal-, ihre Scheitelpunktsform, ihre vollständige Faktorisierung? Beispiel.

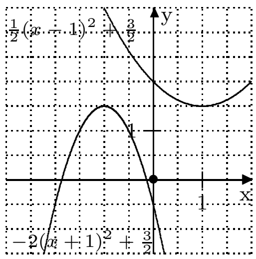
Lösung

- $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ heißt (Normalform einer) quadratische(n) Funktion.
- y-Achsenabschnitt: c
  x-Achsenabschnitte (= Nullstellen x_{12}) mit Mitternachtsformel (in einfachen Fällen durch ausklammern oder direkt auflösen)
  Faktorisierung: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ (falls Nullstellen vorhanden)
- Scheitelpunkt: $x_s = \frac{-b}{2a}$ in F-Gleichung einsetzen $\Longrightarrow y_s \Longrightarrow \mathrm{S}(\,x_s \mid y_s\,)$
  Scheitelpunktsform: $y = a(x - x_s)^2 + y_s$
- Die Normalform erhält man i. Allg. durch ausmultiplizieren.

20. Beschreibe allgemein, wie man aus dem Graphen einer quadratischen Funktion möglichst schnell den dazugehörigen F-Term bestimmen kann und umgekehrt. Beispiele.

Lösung

- Graph → Gleichung:
  Zuerst den Scheitelpunkt $\mathrm{S}(\,x_s \mid y_s\,)$ ablesen. Dann vom Scheitelpunkt ausgehend um eine Einheit nach rechts wandern, und die vorzeichenbehaftete Strecke in y-Richtung bis zum nächsten Punkt auf dem Graphen ablesen. Dieser Wert ist gleich a. Damit hat man die Scheitelpunktsform $y = a(x - x_s)^2 + y_s$.
- Gleichung → Graph:
  Scheitelpunkt bestimmen, vom Scheitelpunkt ausgehend die markanten Punkte $(\,\pm1 \mid a\,)$, $(\,\pm2 \mid 4a\,)$, $(\,\pm3 \mid 9a\,)$ eintragen. Ggf. auch Achsenpunkte und andere bekannte Punkte eintragen.



21. Beschreibe, an einem Beispiel, wie eine Polynomdivision durchgeführt wird und wie die Probeaufgabe dazu heißt.

Lösung

$$
\begin{array}{l}
(x^3+0x^2-\ x+\ 4) : (x-2) = x^2+2x+3+\frac{10}{x-2} \\
\underline{-x^3+2x^2} \\
\quad +2x^2-\ x \\
\quad \underline{-2x^2+4x} \\
\qquad\quad +3x+\ 4 \\
\qquad\quad \underline{-3x+\ 6} \\
\qquad\qquad +10
\end{array}
$$

Probe: $(x^2+2x+3)\cdot(x-2)+10 = \ldots = x^3 - x + 4$ D

22. Beschreibe wie man

(a) Polynome faktorisiert und

(b) Polynomengleichungen löst.

Beispiele.

Lösung

(a) In folgender Reihenfolge versuchen zu faktorieren:
ausklammern — auf binomische Formel untersuchen — „Mitternachtsformel“— Substitution — Polynomdivision.
Beispiel: $3x^5 - 3x^3 + 36x = 3x(x^4 - x^2 + 12)$
Subst. $u = x^2 \Rightarrow u^2 - u + 12 = 0 \Rightarrow u_{12} = \begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$
Somit ist
$u^2 - u + 12 = (u + 3)(u - 4) =$
$= (x^2 + 3)(x^2 - 4) = 3x(x^2 + 3)(x - 2)(x + 2)$
und damit ist $3x^5 - 3x^3 + 36x = 3x(x^2 + 3)(x - 2)(x + 2)$.

(b) PN-Gleichungen werden gelöst, indem man sie auf die Form „Polynom= 0“ bringt und dann aus der Faktorisierung des Polynoms die Lösungen abliest.
$3x^5 + 36x = 3x^3$ hat also die Lösungsmenge $\{= 0; \pm 2$ (siehe oben).

23.(a) Was verseht man unter einer ganzrationalen Funktion vom Grad n? Beispiele.

(b) Wie nennt man ganzrationale Funktionen noch?

(c) Welche Spezialfälle von ganzrationalen Funktionen gibt es?

(d) Was verseht man unter einer gebrochen rationalen Funktion? Beispiele.

Lösung

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine Funktion der Form
$\mathrm{f}(x) = \mathrm{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$ $(a_n \neq 0)$
ganzrationale Funktion.
Z.B. sind $\mathrm{f}(x) = 7\mathrm{x}^{1000} - 1$ und $\mathrm{f}(x) = \mathrm{x}^7 - \mathrm{x}^3 + 5\mathrm{x}^2$ ganzrationale Funktionen,
nicht aber $\mathrm{f}(x) = 2^{\mathrm{x}}$ oder $\mathrm{f}(x) = 3\mathrm{x}^{\frac{1}{2}}$.

(b) Ganzrationale Funktionen heißen auch Polynomfunktionen.

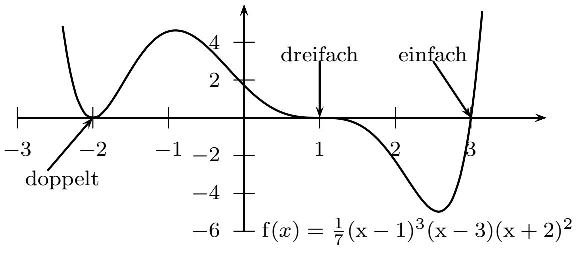
(c) lineare $(n = 1)$, quadratische $(n = 2)$ und Potenz-Funktionen $(a_n = 1$, alle anderen $a_i = 0)$.

(d) Eine gebrochen rationalen Funktion ist der Quotient zweier Polynomfunktionen?
Beispiele: $\mathrm{f}(x) = \frac{3\mathrm{x}^2 - 4}{\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}}$, $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\mathrm{x}^2}$.

24. Was lässt sich über die Nullstellen einer Polynomfunktion von Grad n sagen?

Lösung Eine Polynomfunktion
$\mathrm{f}(x) = \mathrm{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$

- hat maximal n Nullstellen,
- kann genau dann auf die Form $(x - x_1) \cdot \mathrm{g}(x)$ gebracht werden, wenn x_1 eine Nullstelle von $\mathrm{f}(x)$ ist. $\mathrm{g}(x)$ ist dann vom Grad $n - 1$. Man findet $\mathrm{g}(x)$ z.B. mittels Polynomdivision von $\mathrm{f}(x) : (\mathrm{x} - \mathrm{x_1})$.
- Sie schneidet/berührt die x-Achse bei x_1 genau dann, wenn x_1 eine Nullstelle ungerader/gerader Ordnung ist.



25. Was lässt sich über

(a) das Grenzwertverhalten und

(b) das Symmetrieverhalten

einer Polynomfunktion von Grad n sagen?

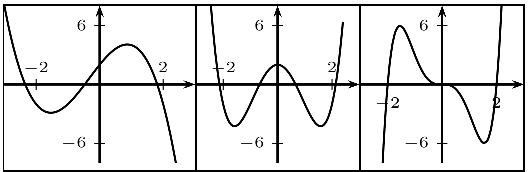
Lösung

Sei $\mathrm{f}(x) = \mathrm{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$

(a)

	$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{f}(x)$			$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{f}(x)$		
n gerade	∞	für	$a_n > 0$	∞	für	$a_n > 0$
	$-\infty$	für	$a_n < 0$	$-\infty$	für	$a_n < 0$
n ungerade	$-\infty$	für	$a_n > 0$	∞	für	$a_n > 0$
	∞	für	$a_n < 0$	$-\infty$	für	$a_n < 0$

(b) Falls $\mathrm{f}(x)$ nur ungerade x-Potenzen aufweist und $a_0 = 0$ ist, ist ihr Graph punktsysmmetrisch zum Ursprung, falls $\mathrm{f}(x)$ nur gerade x-Potenzen aufweist, ist ihr Graph y-achsensymmetrisch.



$-x^3 - x^2 + 4x + 2$	$x^4 - 5x^2 + 2$	$x^5 - 4x^3$

26. Wie kann man sich schnell einen Überblick über den wesentlichen Verlauf des Graphen einer Polynomfunktion machen?

Lösung

- Man faktorisiert die Polynomfunktion vollständig und liest an dem faktorisierten Term die Nullstellen samt Vielfachheit ab.
- Man bestimmt weiter markante Punkte der Funktion (z.B. den y-Achsenabschnitt) und untersucht das Grenzwertverhalten.
- Man trägt alle bekannten Punkte ins Kosy ein.
- Bei Nullstellen ungerader Ordnung hat $\mathrm{f}(x)$ einen Vorzeichenwechsel, bei gerader Ordnung nicht.

Beispiel: siehe Frage 26.

27.(a) Was versteht man unter dem Grenzwert einer Funktion? Wie schreibt man das?

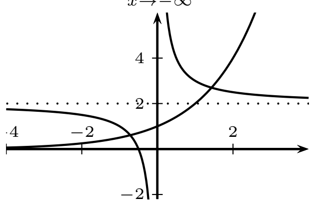
(b) Gib die Grenzwerte einiger typischer Funktionen an.

(c) Wann heißt eine Funktion (bestimmt) divergent?

Lösung

(a) Unterscheiden sich die Funktionswerte einer Funktion f für beliebig große x-Werte immer weniger von einer festen Zahl a, dann heißt a der Limes von f für $x \to \infty$. Man schreibt $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}$. Entsprechendes gilt für $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{f}(x)$.

(b)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} + 2 = 2$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\text{Zahl}}{\text{PN-Fkt}} = 0$

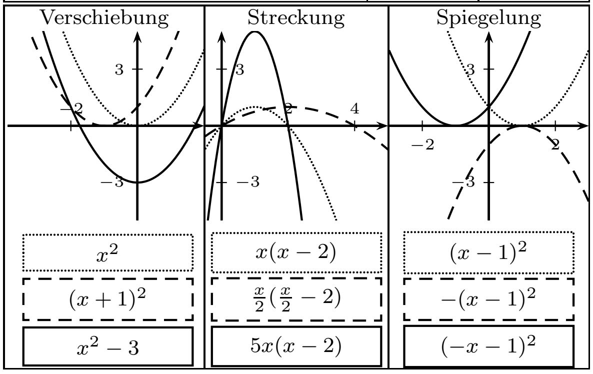


(c) Eine Funktion heißt bestimmt divergent für $x \to \infty$ (analog $x \to -\infty$), falls $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{f}(x) = \pm\infty$ ist. Ist auch das nicht der Fall, heißt sie divergent. z.B. divergiert 2^x für $x \to \infty$ bestimmt gegen ∞; $\sin x$ divergiert für $x \to \pm\infty$, aber nicht bestimmt.

28. Beschreibe allgemein, wie sich der Term einer Funktionen verändert, wenn man den dazugehörigen Graph im Koordinatensystem verschiebt oder verzerrt. Beispiele.

Lösung

$f(x) \rightarrow$	x-Achse	y-Achse
Verschiebung um a in Richtung	$f(x-a)$	$f(x)+a$
Streckung um $c>0$ in Richtung	$f\left(\frac{x}{c}\right)$	$c \cdot f(x)$
Spiegelung an der	$-f(x)$	$f(-x)$

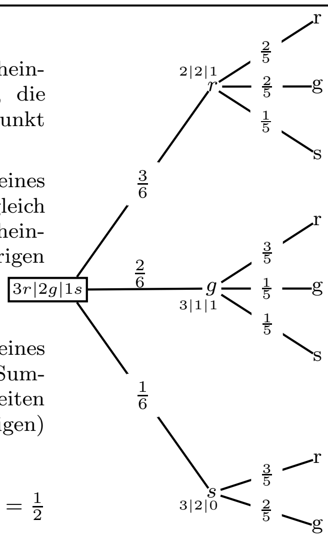


Stochastik

29. Welche Gesetzmäßigkeiten an Wahrscheinlichkeitsbäumen gibt es? Beispiele!

Lösung

- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem zugehörigen Pfad (1. Pfadregel).
  Z.B. $\mathrm{P}(gs) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen (vollständigen) Pfade (2. Pfadregel).
  Beispiel:
  $\mathrm{P}(xr) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$



30.(a) Was versteht man anschaulich unter der bedingten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung B? Beispiel!

(b) Nenne die allgemeine Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit und erkläre ihren Zusammenhang mit einem Baumdiagramm.

Lösung

(a) Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ gibt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis A an, wenn man schon weiß, dass Ereignis B eingetreten ist. Wenn z.B. gilt:
A: „6 richtige im Lotto“ und B: „5 richtige im Lotto“, dann ist $P_B(A) := \frac{1}{44}$.

(b) $P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $(P(B) \neq 0)$.
$P(A \cap B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse A und B eintreten.