Grundwissen Mathe JS 10

15. April 2024

Exponentielles Wachstum und Logarithmus

1. a) Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es, wenn die Größe y mit der Größe x linear bzw. exponentiell wächst?

   b) Wie kann man im linearen und im exponentiellen Fall an der Funktionsgleichung erkennen, ob es sich um ein Wachsen oder ein Fallen handelt?

Lösung

a)

lineares Wachstum	exp. Wachstum
Nimmt x um 1 Einheit zu, so wächst y stets den festen Summanden a.	festen Faktor a.
$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & b & b+a & b+2a & b+3a \end{array}$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & b & ba & ba^2 & ba^3 \end{array}$
Die Wachstumsgleichung lautet	
$y = b + ax$	$y = b \cdot a^x$
dabei ist b gleich dem Bestand zum Zeitpunkt $x = 0$	
Der Graph ist eine	
Gerade mit Steigung a.	Exp-Kurve mit Basis a.

b) Beim linearen Wachstum ist die Steigung a positiv bei der linearen Abnahme negativ. Beim exponentiellen Wachstum ist der Wachstumsfaktor (=Basis) a größer 1, beim Zerfall liegt er zwischen 0 und 1.

2. Welche Sachaufgaben lassen sich mit Exponentialfunktionen beschreiben? Welche Bedeutung haben die Parameter? Beispiel!

Lösung Prozentuale Wachstums- und Zerfallsvorgänge, also auch Zinseszins-Rechnungen.
Beispiel: Eine Population K wächst/schrumpft pro Jahr um p%. Wie groß ist sie nach n Jahren?
Für die Population K(n) nach n Jahren gilt dann

$$\mathrm{K}(n) = K\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n.$$

Z.B. wächst die Weltbevölkerung von 8 Mrd. Menschen derzeit um 1,2%. In 50 Jahren würden dann

$$\mathrm{K}(50) = 8 \cdot 1{,}012^{50} \approx 14{,}7 \text{ Mrd.}$$

Menschen auf der Erde leben.

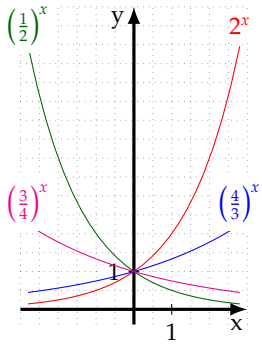
3. a) Wie ist die Exponentialfunktion definiert?

   b) Welche Eigenschaften besitzt die Exponentialfunktion?

Lösung

a) Die Funktion mit der Gleichung $y = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) heißt Exponentialfunktion zur Basis a.

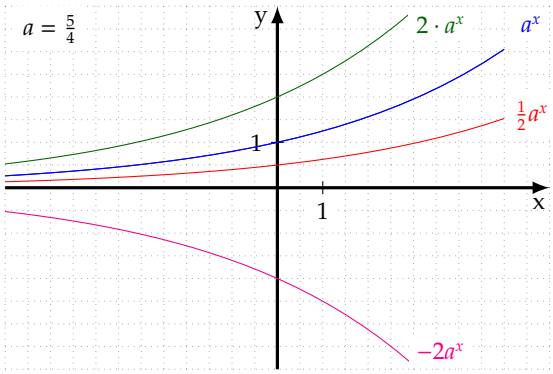
b)



- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
- Jeder Graph geht durch (0|1) und (1|a)
- Nullstellen: keine
- Für $a > 1$ bzw. $0 < a < 1$ ist der Graph monoton steigend bzw. fallend.
- Die x-Achse ist horizontale Asymptote.

4. Wie verändert ein Vorfaktor b vom der Exponentialfunktion das Aussehen des Graphen? Wo schneidet diese neue Funktion dann die y-Achse?

Lösung Der Graph der Funktion $y = b \cdot a^x$ ist gegenüber dem Graphen von $y = a^x$ entlang der y-Achse um den Faktor $|b|$ gestreckt bzw. gestaucht. Wenn $b < 0$ ist, ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.
y-Achsenabschnitt $(0|b)$



5. a) Wie löst man die Gleichung

$$b^r = p$$

nach dem Exponenten auf?

Welche Zahlenbereiche sind für die Parameter erlaubt bzw. möglich?

b) Welche Rechenregeln gelten für das Rechnen mit Logarithmen?

Lösung

a) r ist der Logarithmus von p zur Basis b:

$$b^r = p \iff r = \log_b p$$

Dabei sind $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $r \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}^+$.

b)
- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b^r = r$
- $b^{\log_b p} = p$
- $\log_b(p^x) = x \cdot \log_b p$
  wobei $x \in \mathbb{R}$

6. a) Erkläre an einfachen Beispielen, wie man Exponential- und Logarithmusgleichungen auflöst.
   - $2^{-2x+1} = 16$
   - $\log_{10}(x+2) = -1$

   b) Welche Gleichungen lassen sich nicht algebraisch auflösen?

Lösung

a)

$2^{-2x+1} = 16$	logarithmieren zur Basis 2, $\log_2 \square$
$-2x + 1 = \log_2 16$	vereinfachen
$-2x + 1 = 4$	auflösen nach x...

b)

$\log_{10}(x+2) = -1$	potenzieren $10^\square$
$10^{\log_{10}(x+2)} = 10^{-1}$	vereinfachen
$x + 2 = \frac{1}{10}$	auflösen nach x...

Zur Sicherheit abschließend die Probe machen.

c) Gleichungen, die die Variable gleichzeitig als Summand und Exponent oder Summand und Logarithmand haben.

Z.B. lassen sich $10^x - 2x = 0$ oder $\log_3 x = 2x$ nicht durch Rechenbefehle nach x auflösen.

Stochastik...

...mit dem Wichtigsten aus den Vorjahren

7. Erkläre an einem Beispiel die Begriffe

   a) • Ergebnisraum
      • Mächtigkeit des Ergebnisraumes

   b) • Ereignis
      • Elementarereignisse
      • Gegenereignis

Lösung Beispiel einfacher Würfelwurf

a) • Alle möglichen Ergebnisse werden zu einer Menge Ω (genannt Ergebnisraum) zusammengefasst (im Beispiel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
   • Die Anzahl der Elemente $|\Omega|$ heißt Mächtigkeit des Ergebnisraumes $|\Omega| = 6$.

b) • Ein Ereignis ist eine beliebige Teilmenge des Ergebnisraum. Ereignis E Augenzahl gerade $E = \{2, 4, 6\}$
   • Elementarereignisse sind alle Ereinisse mit nur einem Element: $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$, $\ldots, \omega_6 = \{6\}$
   • Gegenereignis $\overline{E}$ zu einem Ereignis E:
     $E = \{5, 6\} \Rightarrow \overline{E} := \Omega \setminus E = \{1, 2, 3, 4\}$

8. a) Erkläre an einem Beispiel,
   • was man unter der relativen Häufigkeit eines Ereignisses A versteht und
   • und was sie mit der Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses zu tun hat.

Lösung

a) Wirft man einen Würfel z.B. 10 bzw. 600-mal und tritt ein Ereignis (z.B. A =Augenzahl 6) einmal bzw. 112-mal ein, so heißt $h_{10}(A) = \frac{1}{10}$ bzw. $h_{600}(A) = \frac{112}{600}$ die relative Häufigkeit von A in dieser Versuchsfolge.
   Je größer die Anzahl der Versuche ist, desto näher kommt die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(AZ = 4) = \frac{1}{6}$.

9. a) Was ist eine Laplace-Experiment? Beispiel!

   b) Wie berechnet man bei Laplace-Experimenten die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses?

Lösung

a) Ein Zufallsexperiment, bei der jedes Elementarereignis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vorkommt, heißt Laplace-Experiment.
   Beispiel: einfacher Würfelwurf eines gerechten und perfekten Würfels.
   Jede Augenzahl kommt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ vor.

b) Für jedes Ereignis A gilt

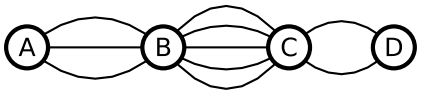
$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}.$$

   Beispiel Augenzahl ist Primzahl $A = \{2, 3, 5\}$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

10. Erkläre mit Hilfe eines Zahlenbeispieles, was man unter dem Zählprinzip versteht. Anwendungsbeispiele!

Lösung Ist ein Zufallsexperiment z.B. in 3 Stufen zerlegbar und gibt es für die einzelnen Stufen 3, 5 und 2 mögliche Ausgänge, dann gibt es für das gesamte Zufallsexperiment $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ mögliche Ausgänge.



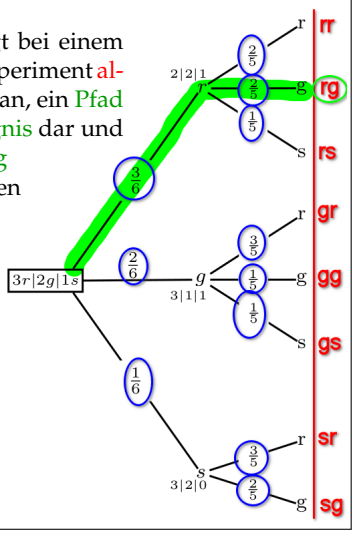
- Beim 4-fachen Würfelwurf gibt es z.B. 6^4 mögliche Ausgänge (wenn man als Beobachtungsgegenstand die Folge der Augenzahlen betrachtet).
- Aus 6 verschiedene Buchstaben kann man $6! = 720$ verschiedenen Kunstwörter bilden.
- Besitzt man 3 Hosen, 5 Hemden und 2 Kravatten, dann kann man sich auf $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ verschieden Arten anziehen.

11. Erkläre an einem Beispiel, was man unter einem Wahrscheinlichkeitsbaum versteht. (Abk. Wahrscheinlichkeit: Wahrslk)

Lösung

Ein Wahrslksbaum zeigt bei einem mehrstufigem Zufallsexperiment alle möglichen Ausgänge an, ein Pfad stellt ein Elementarereignis dar und ist ein vollständiger Weg durch den Baum. Auf den Ästen stehen die ÜbergangsWahrslken. Am Ende des Baumes ist der Ergebnisraum abzulesen

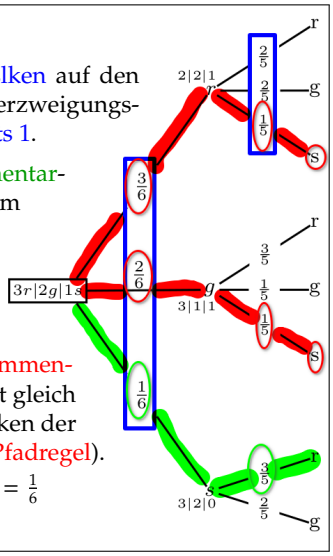
$\Omega = \{ (rr), (rg), (rs), (gr), (gg), (gs), (sr), (sg) \}$



12. Welche Gesetzmäßigkeiten an Wahrslksbäumen gibt es? Beispiele! (Abk. Wahrscheinlichkeit: Wahrslk)

Lösung

- Die Summe der Wahrslken auf den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.
- Die Wahrslk eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrslken auf dem zugehörigen Pfad (1. Pfadregel).
  Z.B. $P(sr) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$
- Die Wahrslk eines zusammengesetzten Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrslken der zugehörigen Pfade (2. Pfadregel).
  Z.B. $P(*s) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$



Sinus- und Kosinusfunktion

13. a) Was versteht man unter einem Drehwinkel, welche Eigenschaften unterscheiden ihn von den „bisherigen“ Winkeln (Halbgeradenpaar)?

b) • Was versteht man unter dem Bogenmaß eines Winkels?

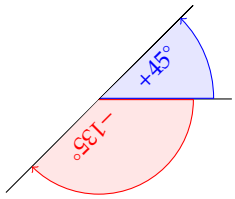
• Nenne die wichtigsten Winkelgrößen im Gradmaß und Bogenmaß und den

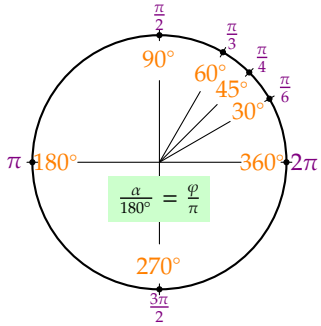
• allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Grad- α und dem Bogenmaß φ eines Winkels?

Lösung

a) Ein postiver / negativer Drehwinkel entsteht, wenn eine Halbgerade um ihren Anfangspunkt gegen / im Uhrzeigersinn gedreht wird. Drehwinkel können auch negativ oder größer als 360° sein.

b) Beim Bogenmaß beträgt der Winkel des Vollkreises nicht 360°, sondern 2π (ohne Einheitensymbol).

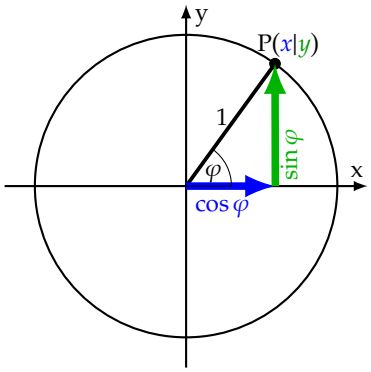


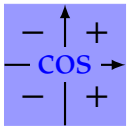


14. • Wie werden die sin- und die cos-Funktion für beliebige Winkel definiert?

• Welches Vorzeichen haben sin und cos in den verschiedenen Quadranten?

Lösung Man zeichnet um den Ursprung eines Koordinatensystem einen Einheitskreis. Für jeden Punkt P(x|y) auf dem Einheitskreis ist die x bzw. y-Koordinate gleich $\cos\varphi$ bzw. $\sin\varphi$. Dabei ist φ gleich dem Drehwinkel zwischen der pos. x-Achse und der Strecke [OP].





15. a) Wie lang sind die Diagonale eines Quadrates bzw. die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a?

b) Wie groß sind die sin- und cos-Werte der wichtigsten Winkelmaße?

c) Wie lautet der „Kleine Satz des Pythagoras“?

d) Wie kann man Gesetzmäßigkeiten von sin- und cos-Werten herleiten?

Lösung

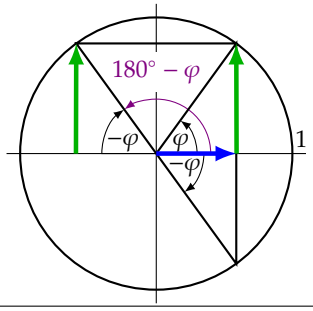
a) $\sqrt{2}a$ bzw. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

b)

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$1 = \frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2}$	$0 = \frac{\sqrt{0}}{2}$

c) $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

d) Durch Überlegungen am Einheitskreis und Betrachtung kongruenter Dreiecke. Z.B. ist
$\cos\varphi = \cos(-\varphi)$
und
$\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$



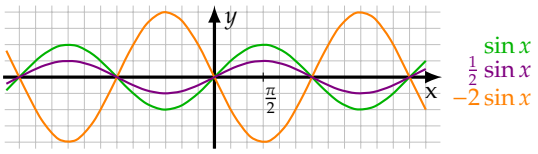
16. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Funktionen mit den Gleichungen

a) $y = \sin x$ und $y = a \sin x$?

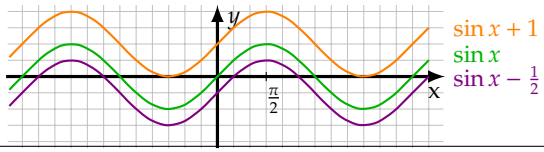
b) $y = \sin x$ und $y = \sin x + d$?

Lösung

a) $y = a \sin x$ ist gegenüber $y = \sin x$ um den Faktor $|a|$ entlang der y-Achse „gedehnt“. Falls $a < 0$ ist, kommt noch eine Spiegelung an der x-Achse hinzu.



b) $y = \sin x + d$ ist gegenüber $y = \sin x$ um d in y-Richtung verschoben; für $d < 0$ nach unten, für $d > 0$ nach oben.



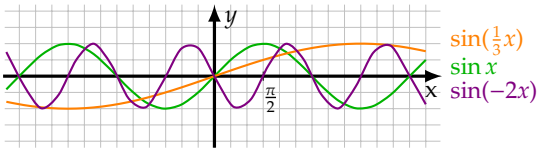
17. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Funktionen mit den Gleichungen

a) $y = \sin x$ und $y = \sin(bx)$?

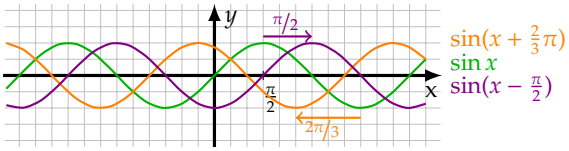
b) $y = \sin x$ und $y = \sin(x + c)$?

Lösung

a) $y = \sin(bx)$ ist gegenüber $y = \sin x$ um den Faktor $|b|$ entlang der x-Achse „gestaucht“. Falls $b < 0$ ist, kommt noch eine Spiegelung an der y-Achse hinzu.



b) $y = \sin(x + c)$ ist gegenüber $y = \sin x$ um den Betrag von c in x-Richtung verschoben. Falls $c < 0$ ist nach rechts, falls $c > 0$ nach links.

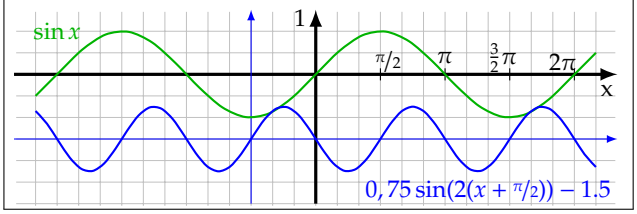


18. Wie lautet die allgemeine Sinusfunktion, welche Bedeutung haben die Parameter?

Lösung

a) $y = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ wobei $a, b \neq 0$

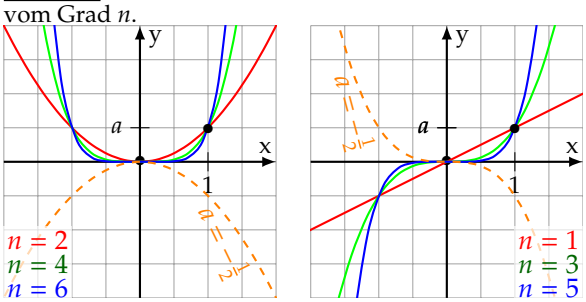
a: Streckung in y-Richtung	$\lvert a\rvert > 1$ Dehnung $\lvert a\rvert < 1$ Stauchung
b: Streckung in x-Richtung	$\lvert b\rvert > 1$ Stauchung $\lvert b\rvert < 1$ Dehnung
c: Verschiebung in x-Richtung	$c > 0$ nach links $c < 0$ nach rechts
d: Verschiebung in y-Richtung	$d > 0$ nach oben $d < 0$ nach unten



Ganzrationale Funktionen

19. Erkläre, was man unter einer Potenzfunktion versteht und nenne die wesentlichen Eigenschaften.

Lösung $y = a \cdot x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$) heißt Potenzfunktion vom Grad n.



- Jeder Graph geht durch (0|0) und (1|a)
- Für gerade bzw. ungerade n ist der Graph parabelartig bzw. sesselartig.
- Für $a > 0$ bzw. $a < 0$ ist der Graph für positive x-Werte monoton steigend bzw. fallend.

20. a) Was versteht man unter einer ganzrationalen Funktion? Beispiele und Gegenbeispiele angeben!

b) Was ist der Grad einer ganzrationalen Funktion?

c) Wie kann man das Verhalten einer ganzrationalen Funktion für betragsmäßig große x-Werte bestimmen?

Lösung

a) Eine Funktion, die als **Summe von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten** geschrieben werden kann.
Beispiele: $f(x) = 5x^4 - 3x + 1$, $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = x^2$
Keine ganzrationalen Funktionen ist z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$.

b) Wenn die ganzrationale Funktionen in Normalform (vollständig ausmultipliziert) vorliegt ist der größte vorkommende x-Exponent der Grad der Funktion.
Z.B. hat $f(x) = -5x^4 - 3x + 1$ den Grad 4.

c) Die Funktion verhält sich wie die Potenzfunktion, die zum Summanden mit dem höchsten Exponenten gehört.
Z.B. gehen die y-Wert von $f(x) = 3x^2 - 5x^4$ für $x \to \pm\infty$ gegen $-\infty$ weil $f(x) = -5x^4$ parabelförmig nach unten geöffnet ist.

21. Wie kann man die Nullstellen von ganzrationalen Funktionen bestimmen? Unterscheide verschiedene Fälle. Gib dabei stets die beste Möglichkeit an.

Lösung Beispiel:
$f(x) = x(2x^3 - 3x^2)(x^2 - 4)(2x^2 + 4x + 2)(x^4 + 3x^2 - 4)$

- Möglichst viel ausklammern und die Nullstellen der einzelnen Faktoren bestimmen.
  $f(x) = 2x^3(2x - 3)(x^2 - 4)(x^2 + 2x + 1)(x^4 + 3x^2 - 4)$
  $x_1 = 0$
- Lineare und reinquadratische Terme: direkt auflösen.
  $2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$; $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm 2$
- (voll) quadratische Terme: Mitternachtsformel
  $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = -1$ doppelte Nullstelle
- Biquadratische Terme: Substitution. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
  $z = x^2 \Rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0 \Rightarrow z_{12} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$
  $x^2 = -4$ keine Lsg.; $x^2 = 1$ also $x_{5,6} = \pm 1$

22. Wie kann schnell den groben Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion ermitteln?

Lösung Beispiel:

$f(x) = (x+2)^3(x+7)^2(2-x)$

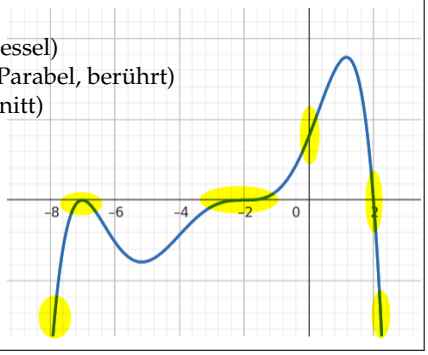
Man bestimmt das Verhalten im Unendlichen, die Nullstellen mit Vielfachheit und ggf. den y-Achsenabschnitt.

Hier:

① Für $x \to \pm\infty$ ist $f(x) \approx -x^6$

② Nullstellen:
-2 (dreifach, Sessel)
-7 (zweifach, Parabel, berührt)
2 (einfach, Schnitt)

③ $f(0) > 0$

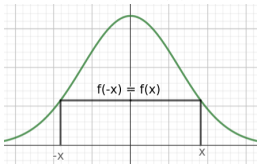
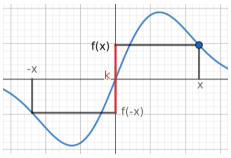


23. a) Welcher allgemeine Zusammenhang muss gelten, damit eine Funktion
- achsensymmetrisch zur y-Achse,
- punktsymmetrisch zum Ursprung ist?

b) Wann ist eine ganzrationale Funktion
- achsensymmetrisch zur y-Achse,
- punktsymmetrisch zum Ursprung?

Lösung

a)

Achsensymmetrie $f(-x) = f(x)$	Punktsymmetrie $f(-x) = -f(x)$
	

b) Der Funktionsterm beinhaltet nur
- gerade x-Potenzen und ggf. eine Konstante, z.B. $f(x) = 3x^6 - x^2 + 1$,
- ungerade x-Potenzen (aber keine Konstante) z.B. $f(x) = 2x^5 - x^3 + x$.

Raumgeometrie

24. a) Wie lauten die Grundformeln für den Durchmesser d, den Kreisumfang U und die Kreisfläche A eines Kreises mit Radius r?

b) Begründe, dass der Kreisumfang direkt proportional zum Radius ist, die Kreisfläche aber nicht.

Lösung

a)
- $d = 2r$
- $U = 2r\pi$
- $A = r^2\pi$

Dabei heißt π Kreiszahl. Es gilt

$$\pi \approx 3,14159 \approx \frac{22}{7}.$$

b) Wegen $U = 2r\pi$ ist $\frac{U}{r} = 2\pi =$ konst, also sind U und r quotientengleich und damit direkt proportional.

Bei $A = r^2\pi$ ist aber $\frac{A}{r} = r \cdot \pi$. Und das ist (wegen des rs) nicht konstant.

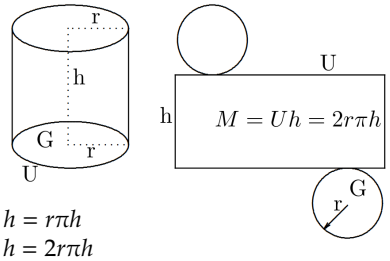
25.

a) Beschreibe das Aussehen des Netzes eines geraden Kreiszylinders.

b) Wie berechnet man das Volumen V , die Mantelfläche M und die Oberfläche S eines geraden Kreiszylinders?

Lösung

a) Das Netz ist zusammengesetzt aus einem Rechteck, das die Zylinderhöhe und den Zylinderumfang als Seitenlängen hat, sowie zwei kongruenten Kreisen, die den gleichen Umfang haben wie der Zylinder.



b) $V = G \cdot h = r\pi h$
$M = U \cdot h = 2r\pi h$
$S = M + 2G$