GYMNASIUM MIT SCHÜLERHEIM PEGNITZ
math.-technolog. u. sprachl. Gymnasium

WILHELM-VON-HUMBOLDT-STRASSE 7
91257 PEGNITZ
FERNRUF 09241/48333
FAX 09241/2564

Grundwissen JS 9

Die reellen Zahlen

2. September 2008

1.(a) Wie ist $\sqrt{a}$ definiert?

(b) Was ist $\sqrt{a^2}$?

(c) Nenne Beispiele für Zahlen, die keine Quadratwurzel in $\mathbb{Q}$ besitzen.

(d) Welche Zahlen umfasst die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen?

Lösung

(a) $\sqrt{a}$ mit $a \geq 0$ ist die nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt.
Z.B. ist $\sqrt{6,25} = 2.5$; denn $2,5^2 = 6.25$.
Allgemein gilt $\sqrt{a}^2 = a$

(b) $\sqrt{a^2} = |a|$.

(c) Z.B. 2 oder $1,6$.

(d) $\mathbb{R}$ besteht aus der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen (endliche und enendliche periodische Dezimalbrüche) und der Menge der irrationalen Zahlen (unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche).

2.(a) Wann dürfen Wurzeln addiert bzw. subtrahiert werden?

(b) Welcher Rechenfehler kann als „Mord des Pythagoras“ bezeichnet werden?

(c) Wie werden Wurzeln multipliziert bzw. dividiert?

Lösung

(a) Summen und Differenzen lassen sich nur bei gleichen Radikanden zusammenfassen.
Z.B. $4\sqrt{10}+5\sqrt{10} = 9\sqrt{10}$; $\sqrt{63}+\sqrt{28} = 3\sqrt{7}-2\sqrt{7} = \sqrt{7}$.

(b) Wer aus $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ die $\sqrt{a+b}$ flux macht, der einfach so Pythag’ras schlacht.
Z.B. $\underbrace{\sqrt{9}}_{3} + \underbrace{\sqrt{16}}_{4} \neq \underbrace{\sqrt{9+16}}_{5}$
Für Differenzen gilt Entsprechendes.

(c) Produkte und Quotienten/Brüche von Wurzeln dürfen unter einer Wurzel zusammengefasst werden.
Z.B. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$; $\sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{2:3}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

3.(a) Was versteht man unter „teilweise radizieren“?

(b) Was versteht man unter „unter die Wurzel ziehen“?

(c) Wie kann man einen Nenner rational machen, wenn er eine Wurzel als Faktor enthält?

Lösung

(a) Der Radikand wird (wenn möglich) so faktorisiert, dass ein Faktor eine Quadratzahl ist. Diese Quadratzahl wird dann radiziert.
Z.B. $\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}$

(b) Faktoren, die vor der Wurzel stehen, werden quadratisch unter die Wurzel gezogen.
Z.B. $4\sqrt{2} = \sqrt{16\cdot 2} = \sqrt{32}$

(c) Der Bruch wird mit der Wurzel selbst erweitert.
Z.B. $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

4.(a) Wie lauten die Binomischen Formeln?

(b) Wozu kann man die Binomischen Formeln verwenden? Beispiele!

Lösung

(a)

Plusformel	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Minusformel	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Plusminusformel	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(b)
- zum Ausmultiplizieren von Summen und Differenzen
  $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3 = 8 - 2\sqrt{15}$
- zum Faktorisieren von Termen
  $9x^2 + 20x + 25 = (3x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2 = (3x+5)^2$
- die Pusminusformel zum rationalmachen des Nenners, wenn dieser eine Summe oder Differenz ist
  $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

Quadratische Funktion und Gleichungen

5.(a) Was ist eine quadratische Gleichung?

(b) Wie lautet die allgemeine Lösungungsformel?

(c) Welche Sonderfälle lassen sich ohne Lösungsformel lösen?

Lösung

(a) Für $a \neq 0$ heißt eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ quadratische Gleichung.

(b) $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ wobei für die Anzahl der Lösungen gilt:

Falls $D = b^2 - 4ac > 0$: zwei Lösungen
$D = b^2 - 4ac = 0$: eine Lösung
$D = b^2 - 4ac < 0$: keine Lösung

(c)
- $c = 0$ (Nulltyp): Lösen durch faktorisieren
  $x^2 - 8x = x(x - 8) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 8$.
- $b = 0$ (reinquadratische Gleichung): direkt auflösen
  $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x_{12} = \pm\sqrt{5}$
- Binomische Formel
  $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_{12} = 1$

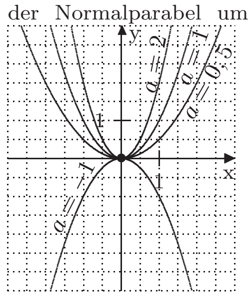
6.(a) Wie nennt man den Graphen einer quadratischen Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$?

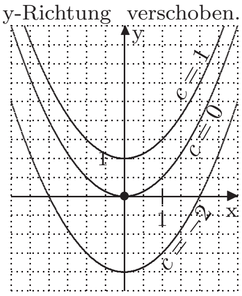
(b) Welchen Einfluss haben die Parameter auf den Verlauf des Funktionsgrapen?

Lösung

(a) Die Graphen heißen Parabeln; für $a = 1$ und $b = c = 0$ heißt der Graph Normalparalbel.

(b)
- – $a > 0$ ($a < 0$): Parabel nach oben (unten) geöffnet.
  – $|a| > 1$ ($|a| < 1$): Parabel „dünner“ („dicker“) als Normalparabel.
- Die Parabel zu $y = ax^2 + c$ ist gegenüber der Normalparabel um c in y-Richtung verschoben.





7. Wie bestimmt man bei einer quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ die Nullstellen, ihren Scheitelpunkt, ihre Normal-, ihre Scheitelpunktsform, ihre vollständige Faktorisierung? Beispiele.

Lösung

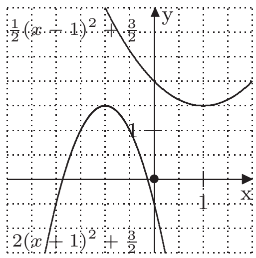
- Nullstellen: bestimmt man mit der Mitternachtsformel (in einfachen Fällen durch ausklammern oder mittels binomischer Formel). Faktorisierung: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ (falls Nullstellen vorhanden)
- Scheitelpunkt: $x_s = \frac{-b}{2a}$ in F-Gleichung einsetzen $\Longrightarrow y_s \Longrightarrow \mathrm{S}(\, x_s \mid y_s \,)$
  Scheitelpunktsform: $y = a(x - x_s)^2 + y_s$
- Die Normalform erhält man i. Allg. durch ausmultiplizieren.

8. Beschreibe allgemein, wie man aus dem Graphen einer quadratischen Funktion möglichst schnell den dazugehörigen F-Term bestimmen kann und umgekehrt. Beispiele.

<u>Lösung</u>

- Graph → Gleichung:
  Zuerst den Scheitelpunkt $\mathrm{S}(\,x_s \mid y_s\,)$ ablesen. Dann vom Scheitelpunkt ausgehend um eine Einheit nach rechts wandern, und die vorzeichenbehaftete Strecke in y-Richtung bis zum nächsten Punkt auf dem Graphen ablesen. Dieser Wert ist gleich a. Damit hat man die Scheitelpunktsform $y = a(x - x_s)^2 + y_s$.

- Gleichung → Graph:
  Scheitelpunkt bestimmen, vom Scheitelpunkt ausgehend die markanten Punkte $(\,\pm 1 \mid a\,)$, $(\,\pm 2 \mid 4a\,)$, $(\,\pm 3 \mid 9a\,)$ eintragen. Ggf. auch Achsenpunkte und andere bekannte Punkte eintragen.



9. Erkläre an einem Beispiel, wie man ein lineares Gleichungssytem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten löst.

<u>Lösung</u> Beispiel

$$\begin{array}{rrcl} \text{I:} & 2a-3b-4c & = & -22 \\ \text{II:} & 5a+2b+4c & = & 11 \\ \text{III:} & 8a+2b-3c & = & -6 \end{array}$$

- Zuerst wird aus zwei Gleichungspaaren [z.B. (I) und (II) sowie (I) und (III)] eine Unbekannte eliminiert.

$$\begin{array}{rrcrl} \text{II-III:} & -3a+7c & = & 17 & \text{(A)} \\ \text{2I+3II:} & 19a+4c & = & -11 & \text{(B)} \end{array}$$

- Man löst das entstehende Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

$$\begin{array}{rrcr} \text{4A-7B:} & -145a & = & 145 \\ & a & = & -1 \end{array}$$

- Man bestimmt mit Hilfe der eben gefundenen Lösung den Wert der dritten Unbekannten und gibt die Lösungsmenge an.

  $a = -1$ in (A) $\Rightarrow c = 2$

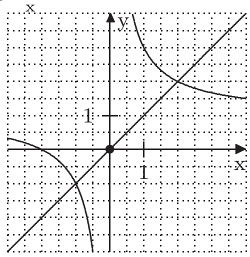
  alles in I $\Rightarrow b = 4$

  $\mathbb{L} = \{\,(\,-1 \mid 4 \mid 2\,)\}$

10. Erkläre an einem Beispiel, wie man die Schnittpunkte von zwei Funktionsgraphen auf zwei verschieden Arten bestimmen kann und welche Nachteile diese Verfahren haben.

<u>Lösung</u> z.B. $\mathrm{g}(x) = \mathrm{x}$ und $\mathrm{f}(x) = \frac{\mathrm{x}+2}{\mathrm{x}}$

- Graphisch kann man die Punkte <u>näherungsweise</u> aus dem Koordinatensystem ablesen. Nachteil: Ableseungenauigkeiten.



- rechnerisch
  - Funktionsterme gleichsetzen und x berechnen.
    $\frac{x+2}{x} = x \Rightarrow x + 2 = x^2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$
  - gefundene x in eine der beiden Funktionen einsetzen und den dazugehörigen y-Wert berechnen.
    $\Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 2.$
    Nachteil: rechenaufwendig und fehleranfällig

allgemeine Potenzen

11. Wie sind Potenzen mit ganzzahligen Exponenten definiert? Beispiele!

Lösung Sei $n \in \mathbb{N}$: Dann ist

- $a^0 = 1$ für $a \in \mathbb{R}$
- $a^1 = a$ für $a \in \mathbb{R}$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $n > 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Beispiele:

- $(-3)^4 = 81$
- $-3^4 = -81$
- $(-1)^{2n+1} = -1$ für $n \in \mathbb{N}$
- $2^{-3} = \frac{1}{8}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$

12.(a) Definiere $\sqrt[n]{a}$ in Worten und in einer Gleichung.

(b) Definiere $\sqrt[n]{a^m}$ in Worten und in einer Gleichung.

Lösung

(a) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ist die nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt; d.h. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ Dabei ist $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ist die nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz a^m ergibt; d.h. $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$ Dabei ist $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

13. Wie lauten die Potenzgesetze? Beispielaufgaben!

Lösung Für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ oder $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $m, n \in \mathbb{R}$ gilt

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Beispiel: $\left(\dfrac{64a^{-4,5}b^{-3}}{125b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \ldots = \dfrac{25}{16}a^3b^3$

14.

(a) Was versteht man unter der Gleitkommadarstellung einer Zahl?

(b) Wozu ist sie gut?

(c) Gib folgende Längen in der Einheit mm in GKD an:

- 4321 nm
- $0,00123\,\text{pm}$

Lösung

(a) Die Darstellungsform $m \cdot 10^z$ mit $1 \leq |m| < 10$ und $z \in \mathbb{Z}$ heißt Gleitkommadarstellung der Zahl.

(b) Man kann damit Zahlen übersichtlich und mit festgelegter Genauigkeit (Stichwort: gültige Ziffern) darstellen.

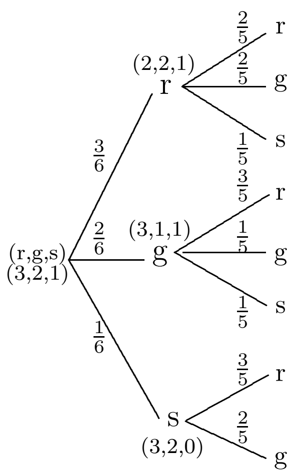
(c)
- $4\,321\,\text{nm} = 4321 \cdot 10^{-9}\,\text{m} = 4,321 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 4,321 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}$
- $0,00123\,\text{pm} = 0,00123 \cdot 10^{-12}\,\text{m} = 0,00123 \cdot 10^{-15}\,\text{m} = 1,23 \cdot 10^{-6}\,\text{mm}$

Stochastik

15. Welche Gesetzmäßigkeiten an Wahrscheinlichkeitsbäumen gibt es? Beispiele!

Lösung

- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem zugehörigen Pfad (1. Pfadregel).
  Z.B. $\text{P}(gs) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen (vollständigen) Pfade (2. Pfadregel).
  Beispiel:
  $\text{P}(xr) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$



Das rechtwinklige Dreieck

16.(a) Wie lautet der Satz des Pythagoras, wie sein Kehrsatz?

(b) Mit welcher Formulierung kann man Satz und Kehrsatz zusammenfassen?

(c) Wie erhält man allgemein aus einem mathematischen Satz den Kehrsatz?

(d) Nenne einen mathematischen Satz, dessen Kehrsatz falsch ist.

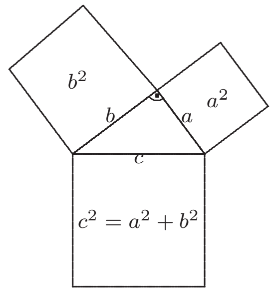
Lösung

(a) Satz: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist $a^2 + b^2 = c^2$.
Kehrsatz: Wenn in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

(b) Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn $a^2 + b^2 = c^2$.

(c) Man muss die Voraussetzung (wenn-Teil) und die Behauptung (dann-Teil) ohne die Worte „wenn“ und „dann“ vertauschen.

(d) Wenn ein Viereck ein Quadrat ist, dann hat es einen 90° Winkel.



17.(a) Wie lautet der Höhensatz?

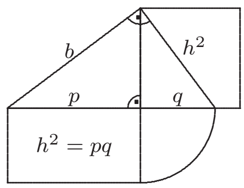
(b) Wie lautet der Kathetensatz?

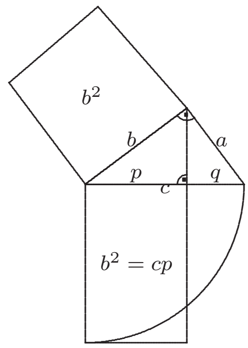
Lösung In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypothenuse c gilt

(a) $h^2 = pq$ und

(b) $a^2 = cq$ und $b^2 = cp$.

Dabei ist p der Hypothenusenabschnitt unter b und q der Hypothenusenabschnitt unter a.





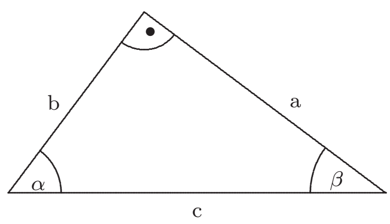
18. Wie hängen in einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenverhältnisse mit den Innenwinkeln zusammen?

Lösung

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von a}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von a}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c} = \sin\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von a}}{\text{Ankathete von a}}$$



19. (a) Wie lang ist die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge a?

(b) Wie lang ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a?

(c) Wie groß sind sin, cos und tan von $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ und $90°$?

Lösung

(a) $\sqrt{2}a$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(c)

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/

20. Nenne die wichtigsten Zusammenhänge zwischen sin, cos und tan.

Lösung

- $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
- $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
- $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Raumgeometrie

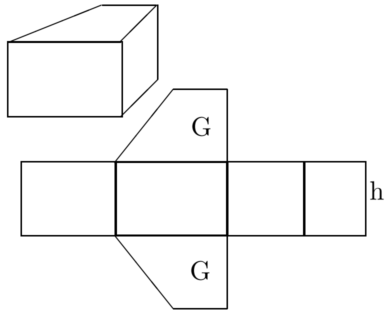
21.

(a) Beschreibe das Aussehen des Netzes eines geraden Prismas.

(b) Wie berechnet man das Volumen V, die Mantelfläche M und die Oberfläche S eines geraden Prismas?

Lösung

(a) Das Netz besteht aus zwei kongruenten n-Ecken (der Grund- und Deckfläche) und einem Rechteck, das aus den Rechtecken der Seitenflächen des Prismas zusammengesetzt ist.



(b) $S = 2G + M = 2G + Uh$
$V = Gh$

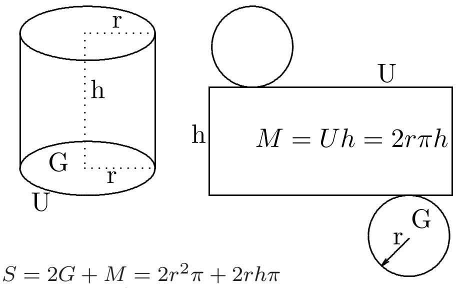
22.

(a) Beschreibe das Aussehen des Netzes eines geraden Kreiszylinders.

(b) Wie berechnet man das Volumen V, die Mantelfläche M und die Oberfläche S eines geraden Kreiszylinders?

Lösung

(a) Das Netz ist zusammengesetzt aus einem Rechteck, das die Zylinderhöhe und den Zylinderumfang als Seitenlängen hat, sowie zwei kongruenten Kreisen, die den gleichen Umfang haben wie der Zylinder.



(b) $S = 2G + M = 2r^2\pi + 2rh\pi$
$V = Gh = r^2\pi h$

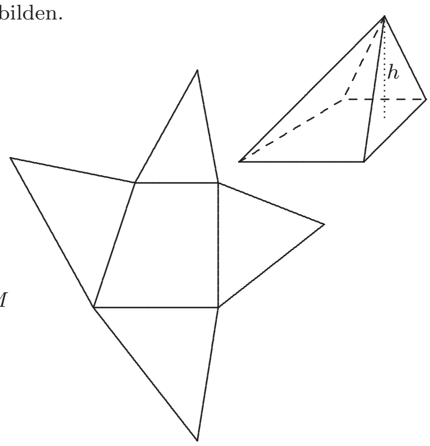
23.

(a) Beschreibe das Aussehen des Netzes einer Pyramide.

(b) Wie berechnet man das Volumen V, die Mantelfläche M und die Oberfläche S eines Pyramide?

Lösung

(a) Das Netz ist zusammengesetzt aus einem n-Eck (der Grundfläche), und n Dreiecken, die die Seitenflächen der Pyramide bilden.



(b) $S = G + M$
$V = \frac{1}{3}Gh$

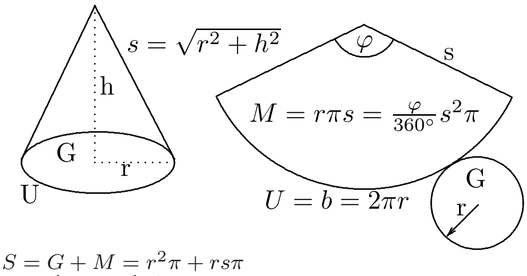
24.

(a) Beschreibe das Aussehen des Netzes eines geraden Kreiskegels.

(b) Wie berechnet man das Volumen V, die Mantelfläche M und die Oberfläche S eines geraden Kreiskegels?

Lösung

(a) Das Netz ist zusammengesetzt aus einem Kreissektor, der die Mantellinie s als Radius und den Umfang des Zylinderkreises als Bogenlänge b besitzt, sowie einem Kreis, der den gleichen Umfang hat, wie der Zylinder.



(b) $S = G + M = r^2\pi + rs\pi$
$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}r^2\pi h$