GYMNASIUM MIT SCHÜLERHEIM PEGNITZ
mathem.-technolog. u. sprachl. Gymnasium

WILHELM-VON-HUMBOLDT-STRASSE 7
91257 PEGNITZ
FERNRUF 09241/48333
FAX 09241/2564

Grundwissen JS 8

Algebra

26. Mai 2011

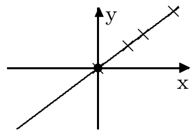
1. Wie kann man erkennen, ob zwei Größen x und y direkt proportional zueinander sind? Gib vier Möglichkeiten an.

Lösung

- Die Größenpaare der Wertetabelle sind quotientengleich. Der gemeinsame Quotient heißt Proportionalitätsfaktor m.

x	0	2	5	10	7	3
y	0	$1,5$	$3,75$	$7,5$	$5,25$	$2,25$
$m = \frac{y}{x}$				$\frac{3}{4}$		

- Dem $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4, \ldots, k-$fachen der einen Größe wird das $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4, \ldots, k-$fache der anderen Größe zugeordnet.
- Zwischen x und y besteht die Formel $y = m \cdot x$, wobei m eine Konstante ist.
- Die Wertepaare $(\ x \mid y\ )$ liegen auf einer Ursprungsgerade.



2. Nenne Größenpaare, die eindeutig
   (a) direkt proportional zueinander sind.
   (b) nicht direkt proportional zueinander sind.

Lösung

(a)
- „gefahrene Strecke“ und „dafür benötigte Zeit“ bei konstanter Geschwindigkeit.
- Preis und Menge der gekauften Ware (falls kein Mengenrabatt gewährt wird).
- „Kreisradius“ und „Kreisumfang“ ($m = 2\pi$)

(b)
- Körpergröße und Alter.
- Kantenlänge und Flächeninhalt eines Quadrates ($A = a^2$).
- Radius und Flächeninhalt eines Kreises ($A = \pi r^2$).

3. Erkläre an einem Beispiel die Begriffe
   (a) Funktion
   (b) Wertetabelle
   (c) Definitionsmenge und
   (d) Wertemenge
   (e) Graph der Zuordnung

Lösung

(a) Bei einer Funktion wird jedem x aus einer Menge $\mathbb{D}$ genau ein y-Wert zugeordnet.
Z.B. ordnet der Term $\mathrm{T}(x) = \mathrm{y} = \frac{1}{2}\mathrm{x}^2$ jedem x-Wert die Hälfte seines Quadrates zu.

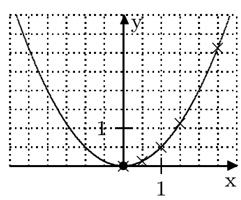
(b) Die Wertetabelle listet für einige x-Werte die dazugehörigen y-Werte auf.

x	0	1	$1,5$	2	$\frac{1}{2}$	$2,5$
y	0	$\frac{1}{2}$	$1,125$	2	$\frac{1}{8}$	$3,125$

(c) Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ legt fest, welche Werte für x eingesetzt werden dürfen. (im Bsp: $\mathbb{D} = \mathbb{Q}$)

(d) Die Wertemenge $\mathbb{W}$ ist die Menge der möglichen y-Werte. (im Bsp: $\mathbb{W} = \mathbb{Q}_0^+$)

(e) Der Graph stellt alle Wertepaare $(x|y)$ als Punkte im Koordinatensystem dar.



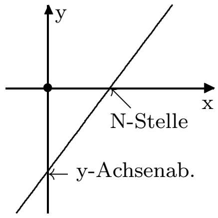
4.(a) Welche Eigenschaften hat die Nullstelle einer Funktion?

(b) Was ist der y-Achsenabschnitt einer Funktion und wie kann man ihn berechnen?

(c) Wie erkennt man an einem Graph, ob er zu einer Funktion gehört?

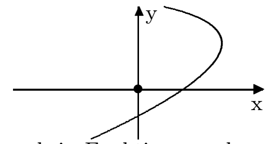
Lösung Beispiel: $y = \frac{4}{3}x - 2$

(a) Die Nullstellen sind die x-Werte, deren y-Wert gleich Null ist. Der Graph schneidet dort die x-Achse. im Bsp.: Nullstelle: $x = 1,5$

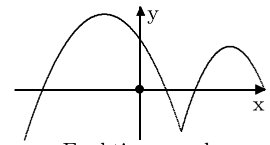


(b) Der y-Achsenabschnitt t ist der y-Wert, der zu $x = 0$ gehört. Der Graph schneidet dort die y-Achse. im Bsp.: $t = -2$

(c) Bei Funktionsgraphen darf jede Parallele zur y-Achse den Graph höchstens einmal schneiden.



kein Funktionsgraph



Funktionsgraph

5.(a) Wie lautet die allgemeine Geradengleichung einer Gerade g. Wie bezeichnet man die Parameter?

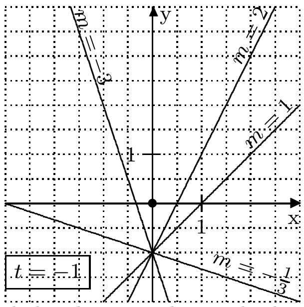
(b) Welche Aussagen kann man über den Verlauf des Graphen einer linearen Funktion machen, wenn man nur die Funktionsgleichung kennt.

(c) Welche Geraden des Koordinatensystems lassen sich nicht durch die allgemeine Geradengleichung darstellen? Wie lauten ihre Zuordnungsgleichungen?

Lösung

(a) $y = mx + t$; m heißt Steigungsfaktor, t heißt y-Achsensabschnitt.

(b)
- Je größer $|m|$, desto steiler verläuft g.
- $\underline{m > 0:}$ g steigt nach rechts an.
  $\underline{m < 0:}$ g fällt nach rechts ab.
  $\underline{m = 0:}$ g verläuft parallel zur x-Achse.
- g schneidet die y-Achse im Punkt $T(0 \mid t)$.



(c) Die Parallelen zur y-Achse haben keine Funktionsgleichung weil zu jedem x-Wert ∞–viele y-Werte gehören. Ihre Zuordnungsgleichung lautet z.B. $x = 3$ oder $x = -\frac{1}{2}$.

6.(a) Wie kann man zu einer vorgegebenen Geradengleichung den dazugehörigen Funktionsgraphen finden? Gib zwei Möglichkeiten an.

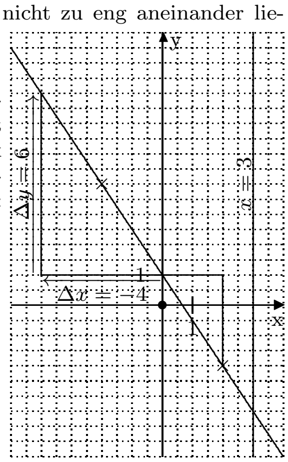
(b) Wie kann man die Zuordnungsgleichung einer Gerade aus ihrem Graphen bestimmen?

Lösung Beispiel: $y = -1.5x + 1$

(a)
- Mit Hilfe einer Miniwertetabelle sucht man zwei Punkte des Funktionsgraphen, die nicht zu eng aneinander liegen.

x	−2	2
y	4	−2

- y-Achsenabschnitt markieren (+1) und ein nicht zu kleines Steigungsdreieck $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ anhängen. Steigungsdreiecke im Beispiel: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{2} = \frac{6}{-4} = \frac{3}{-2}$ (cm oder KäE)



(b) Wenn die Gerade parallel zur y-Achse verläuft, hat sie die Gleichung x ={Nullstelle}, wenn nicht, so liest man am y-Achsenabschnitt t ab und berechnet mittels Steigungsdreieck $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

7. Erkläre an einem Beispiel, wie man die Gleichung einer Gerade bestimmt, die durch 2 Punkte geht. Wie kann man das Ergebnis überprüfen?

Lösung Beispiel: P(2 | −3), Q(−6 | 3).

- Die allgemeine Geradengleichung aufstellen.
  $y = mx + t$
- m mittels Steigungsformel berechnen.
  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = m = \frac{3-(-3)}{-6-2} = -0,75$
- m und die Koordinaten von P in die allgemeine Geradengleichung einsetzen und diese nach t auflösen.
  $-3 = -0,75 \cdot 2 + t \Rightarrow \ldots t = -1,5$
- m und t in allgemeine die Geradengleichung einsetzen.
  $\underline{\underline{y = -0,75x - 1,5}}$
- Probe: P und Q einsetzen.
  - mit P: $-3 = -0,75 \cdot 2 - 1,5$ ✓
  - mit Q: $3 = -0,75 \cdot (-6) - 1,5$ ✓

8. Erkläre an einem Beispiel, wie man eine lineare Ungleichung mit Hilfe von Äquivalenzumformungen löst.

Lösung

$$\begin{aligned} 4 + 2,5x &\leq 7 + 3x \quad | - 3x - 4 \\ -0,5x &\leq 3 \quad | \cdot (-2) \\ x &\geq -6 \end{aligned}$$

{alle x auf eine Seite, alle Konstanten auf die andere}

$\underline{\underline{\mathbb{L} = [-6; \infty[}}$

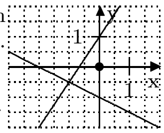
Beachte:

- Bei der Multiplikation mit oder Division durch eine negative Zahl muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden.
- Multiplikation mit Null und Division durch Null sind keine Äquivalenzumformungen.

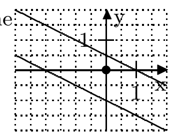
9. Erkläre an geeigneten Beispielen, wie man ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 2 Variablen graphisch löst, und welche Sonderfälle auftreten können.

Lösung Man bestimmt die gemeinsamen Punkte der beiden Geraden g und h, die zu dem LGS gehören.

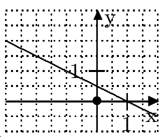
- g und h schneiden sich in genau einem Punkt, d.h. es gibt genau ein Lösungspaar.
  I: $y = 1,5x + 1$
  II: $y = -0,5x - 1$ $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-1| - 0,5)\}}}$



- g und h sind parallel, d.h. es gibt keine Lösung.
  I: $y = -0,5x + 0,5$
  II: $y = -0,5x - 1$ $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}}$



- g und h sind identisch, d.h. alle Punkte der Gerade sind Lösungen.
  I: $y = -\frac{1}{2}x + 0,5$
  II: $y = -0,5x + \frac{1}{2}$
  $\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(x|y)|y = -0,5x + 0,5\}}}$



10. Erkläre an einem geeigneten Beispiel, wie man ein LGS mit 2 Variablen nach dem Einsetzungsverfahren löst.

Lösung I: $0 = 2x - y + 3$
II: $3x + y = 8$

Auflösen einer Gleichung nach einer Variable	I*: $y = 2x + 3$
Einsetzen der rechten Seite in die zweite Gleichung und lösen dieser Gleichung	$3x + \underbrace{(2x+3)}_{y} = 8$ $\Rightarrow \ldots x = 1$
Einsetzen der Lösung in eine der beiden Anfangsgleichungen. Zweiten Variablenwert berechnen.	x in I einsetzen $0 = 2 \cdot 1 - y + 3$ $\Rightarrow y = 1$
Lösungsmenge angeben	$\mathbb{L} = \{(1\|5)\}$

11. Wie erkennt man beim Einsetz- und beim Gleichsetzverfahren, dass das LGS

(a) keine

(b) unendlich viele Lösungen

besitzt?

Lösung Beim Auflösen der Gleichung, die nach dem Ein- bzw. Gleichsetzen entsteht, ergibt sich eine

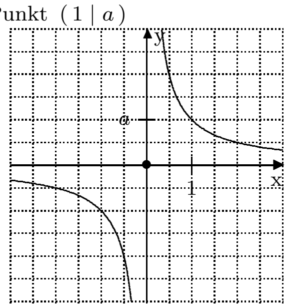
(a) unerfüllbare Aussage (z.B. $3 = 0$).

(b) allgemeingültige Aussage (z.B. $0 = 0$).

12. Nenne die wesentlichen Eigenschaften der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{Q}^+)$

Lösung

- $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- Der Graph besteht aus zwei zueinander punktsymmetrischen Hyperbelästen im I. bzw. III Quadranten;
- Der Graph geht durch den Punkt $(1 \mid a)$
- Die x-Achse ist waagrechte, die y-Achse senkrechte Asymptote des Funktionsgraphen.
- Die Größen x und y sind produktgleich, man sagt auch, sie sind indirekt proportional $(x \cdot y = a)$



13. - Wie werden Bruchterme erweitert bzw. gekürzt? Beispiel!
    - Welches Problem ergibt sich beim Erweitern bzw. Kürzen möglicherweise? Beispiel!

Lösung Zähler und Nenner werden mit dem gleichen Faktor multipliziert bzw. durch den gleichen Faktor dividiert. Dabei kann sich der Definitionsbereich ändern.

$$\underbrace{\frac{x^2-x}{2x}}_{\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{0\}} = \frac{x(x-1)}{2x} \underset{x}{=} \underbrace{\frac{x-1}{2}}_{\mathbb{D}=\mathbb{Q}} \overset{x-2}{=} \underbrace{\frac{(x-1)(x-2)}{2(x-2)}}_{\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{2\}}$$

14. Wie addierst du
    (a) Bruchterme mit gleichen Nennern?
    (b) Bruchterme mit verschiedenen Nennern?
    (c) Was ist bei der Angabe des Definitionsbereiches zu beachten?

    Beispiele!

Lösung

(a) Zähler + Zähler, Nenner bleibt gleich (kürzen!)

$$\frac{2-x}{x^2+3x} - \frac{2x+2}{x^2+3x} = \frac{2-x-(2x+2)}{x^2+3x} =$$
$$= \frac{-3x}{x(x+3)} = -\frac{3}{x+3}$$

(b) Brüche auf Hauptnenner erweitern, dann wie in (a) vorgehen

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{\underbrace{x^2+3x}_{x(x+3)}} = \frac{1(x+3)-3}{x(x+3)} = \frac{x}{x(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

(c) Innerhalb des Definitionsbereiches müssen <u>alle</u> Terme der Umformung definiert sein. In beiden obigen Beispielen ist also $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0; -3\}$.

15.(a) Wie multiplizierst du zwei Bruchterme?
    (b) Wie dividierst du zwei Bruchterme durcheinander?

    Beispiele!

Lösung

(a) Zähler · Zähler durch Nenner · Nenner.
Beachte: Man braucht keinen Hauptnenner bilden und sollte (falls möglich) **vor dem Multiplizieren** kürzen.

$$\frac{x}{x+3} \cdot \frac{x-3}{2x} = \frac{x \cdot (x-3)}{(x+3) \cdot 2x} \underset{x}{=} \frac{x-3}{2(x+3)}$$

(b) Bruch · Kehrbruch. **Erst vor dem Multiplizieren** kürzen.

$$\frac{10}{x^2-2x} : \frac{5}{x} = \frac{10}{x^2-2x} \cdot \frac{x}{5} = \frac{10 \cdot x}{x(x-2) \cdot 5} \underset{5x}{=} \frac{2}{x-2}$$

16. Erkläre an einem Beispiel, wie man eine Bruchgleichung löst.

Lösung Beispiel: $\frac{4}{3x} - \frac{1}{x} = \frac{2}{6-x}$

$\mathbb{D}$ bestimmen:	$\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$
beide Seiten als Bruch darstellen:	$\frac{4-3}{3x} = \frac{2}{6-x}$
mit dem HN multiplizieren:	$1 \cdot (6-x) = 2 \cdot 3x$
vereinfachen:	$6 - x = 6x$
	$x = \frac{6}{7}$
Probe:	$\ldots$ ✓
Lösungsmenge:	$\mathbb{L} = \{\frac{6}{7}\}$

17. Wie sind Potenzen mit ganzzahligen Exponenten definiert? Beispiele!

Lösung Für $a \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Beispiele:

- $(-3)^4 = 81$
- $-3^4 = -81$
- $(-1)^{2n+1} = -1$ für $n \in \mathbb{N}$
- $2^{-3} = \frac{1}{8}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$

18.

(a) Was versteht man unter der Gleitkommadarstellung einer Zahl?

(b) Wozu ist sie gut?

(c) Gib folgende Lösungen in der Einheit mm in GKD an:

- $4321\,\text{m}$
- $0,00123\,\text{mm}$

Lösung

(a) Die Darstellungsform $m \cdot 10^z$ mit $1 \leq |m| < 10$ und $z \in \mathbb{Z}$ heißt Gleitkommadarstellung der Zahl.

(b) Man kann damit Zahlen übersichtlich und mit festgelegter Genauigkeit (Stichwort: gültige Ziffern) darstellen.

(c)
- $4\,321\,\text{m} = 4\,321\,000\,\text{mm} = 4,321 \cdot 10^6\,\text{mm}$
- $0,00123\,\text{mm} = 0,00000123\,\text{m} = 1,23 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$

19. Wie lauten die Potenzgesetze? Beispielaufgaben!

<u>Lösung</u> Für $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Beispiele

- $3^{-4} \cdot 3^6 = 3^2 = 9$
- $\frac{3^4}{3^{-2}} = 3^6$
- $(\frac{2}{9})^2 \cdot (\frac{3}{2})^2 = (\frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 2})^2 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$
- $(3^{-2})^{-3} = 3^6$

Stochastik

20. Erkläre mit Hilfe eines Zahlenbeispieles, was man unter dem Zählprinzip versteht. Anwendungsbeispiele!

Lösung

Ist ein Zufallsexperiment z.B. in 5 Stufen zerlegbar und gibt es für die einzelnen Stufen $10, 8, 6, 4$ und 2 mögliche Ausgänge, dann gibt es für das gesamte Zufallsexperiment $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ mögliche Ausgänge.

Anwendungsbeispiele:

- Beim 4-fachen Wrfelwurf gibt es z.B. 6^4 mögliche Ausgänge (wenn man als Beobachtungsgegenstand die Folge der Augenzahlen betrachtet).
- Aus 6 verschiedene Buchstaben kann man $6! = 720$ verschiedenen Kunstwörter bilden.
- Besitzt man 3 Hosen, 5 Hemden und 2 Kravatten, dann kann man sich auf $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ verschieden Arten anziehen.

21.(a) Was ist eine Laplace-Experiment? Beispiel!

(b) Wie berechnet man bei Laplace-Experimenten die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses?

Lösung

(a) Ein Zufallsexperiment, bei der jedes mögliche Ergebnis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vorkommt, heißt Laplace-Experiment.
Beispiel:

Exp:	Wurf zweier unterscheidbarer gerechter Würfel
BG:	gewürfelte Augen

Jede Augenfolge kommt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ vor. Dabei wird z.B. zwischen dem Ergebnis $(1|2)$ und $(2|1)$ unterschieden.

(b) Für jedes Ereignis A gilt

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}.$$

Beispiel (Fortsetzung von oben)

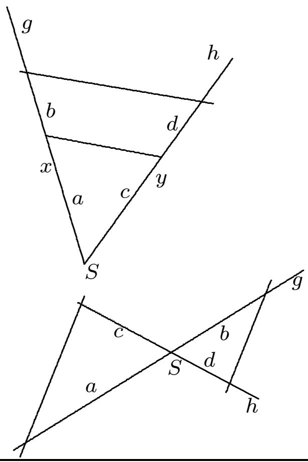
gewünschtes Ereignis A: Augensumme 3

$$P(A) = P((1,2),(2,1)) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Geometrie

22. Gegeben sind zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt schneiden.
Wie lautet der erste Strahlensatz? Stelle damit Streckenverhältnisse bei einer V- und einer X-Figur auf.

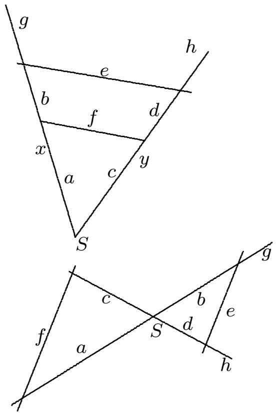
Lösung Genau dann wenn g und h von zwei parallelen Geraden geschnitten werden, verhalten sich zwei Steckenabschnitte auf g wie die entsprechenden Streckenabschnitte auf h.



auf g		auf h
$\frac{a}{b}$	$=$	$\frac{c}{d}$
$\frac{x}{b}$	$=$	$\frac{y}{d}$
$\frac{x}{a}$	$=$	$\frac{y}{c}$
$\frac{a+b}{b}$	$=$	$\frac{c+d}{d}$
$\frac{a}{a+b}$	$=$	$\frac{c}{c+d}$

23. Gegeben sind zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt S schneiden.
Wie lautet der zweite Strahlensatz? Stelle damit Streckenverhältnisse bei einer V- und einer X-Figur auf.

Lösung Genau dann wenn g und h von zwei parallelen Geraden geschnitten werden, dann verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die Entfernungen ihrer Endpunkte von S auf g (oder h).



$$\frac{e}{f} = \frac{x}{a}$$
$$\frac{e}{f} = \frac{y}{c}$$
$$\frac{e}{f} = \frac{d}{c}$$
$$\frac{e}{f} = \frac{b}{a}$$

24. (a) Beschreibe den Begriff „Ähnlichkeit“ anschaulich.
(b) Nenne Beispiele für ähnliche Figuren.
(c) Welche Eigenschaften besitzen ähnliche Figuren?

Lösung

(a) Wenn eine Figur das identische oder vergrößerte Abbild der anderen Figur ist, so heißen die Figuren ähnlich.

(b)
- Alle Quadrate, Kreis, gleichseitigen Dreiecke sind jeweils einander ähnlich.
- Maßstäbliche Landkarten des gleichen Gebietes sind einander ähnlich.

(c)
- Entsprechende Seiten stehen stets im gleichen Verhältnis m. Dieses Verhältnis wird Abbildungsmaßstab genannt.
- Für die Flächeninhalte A und A' zweier ähnlicher Figuren gilt $A' = m^2 \cdot A$.

25. Nenne die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

Lösung Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in folgenden Konstruktionsdaten bereinstimmen:

- im Verhältnis der drei Seitenlängen (vvv)
- im Verhältnis zweier Seitenlängen und der Größe des eingeschlossenen Winkels (vwv)
- in der Größe zweier Winkel (ww)
- im Verhältnis zweier Seitenlängen und der Größe des der längeren der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels (VvW)