GYMNASIUM MIT SCHÜLERHEIM PEGNITZ
math.-technolog. u. sprachl. Gymnasium

WILHELM-VON-HUMBOLDT-STRASSE 7
91257 PEGNITZ
FERNRUF 09241/48333
FAX 09241/2564

Grundwissen JS 5 Algebra

Rechnen in $\mathbb{N}$

29. Juli 2009

1.(a) Was versteht man unter der Menge der natürlichen Zahlen?

(b) Welche Zahl ist keine natürliche Zahl? Wie schreibt man das? Wie spricht man das aus?

(c) Wie kann man bei zwei Zahlen feststellen, welche die kleinere ist?

(d) Nenne spezielle Teilmengen der natürlichen Zahlen.

Lösung

(a) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen umfasst alle „Zählzahlen“($\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$).

(b) $0 \notin \mathbb{N}$, d.h. Null ist nicht Element der Menge der natürlichen Zahlen.

(c) Von zwei natürlichen Zahlen ist die die kleinere, die beim Zählen zuerst kommt. Auf dem Zahlenstrahl liegt die kleinere Zahl stets weiter links. Z.B. ist $3 < 5$.

(d) Die Menge der

- geraden Zahlen $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
- ungeraden Zahlen $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
- Primzahlen $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$.
- Quadratzahlen $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$.
- Stufenzahlen $\{1, 10, 100, 1\,000, 10\,000, \ldots\}$.

2.(a) Runde die Zahl 1 480 auf ganze

- Tausender,
- Hunderter und
- Zehner

(b) Wie lautet die Rundungsregel allgemein?

(c) Wozu ist das Runden nützlich?

Lösung

(a)
- $\underline{1}\,480 \approx 1\,000$
- $1\,\underline{4}80 \approx 1\,500$
- $1\,4\underline{8}0 \approx 1\,480$

(b) Ist die Ziffer nach der Stelle, auf die gerundet wird, eine

- $0, 1, 2, 3$ oder 4, dann wird abgerundet,
- $5, 6, 7, 8$ oder 9, dann wird aufgerundet.

(c) Durch das Runden erhält man einprägsame Zahlen, die die wesentlichen Informationen enthalten. Beispiel: In Deutschland leben rund 80 000 000 Menschen.

3.(a) Erkläre an einem Beispiel, wie die Bausteine einer Summe heißen.

(b) Erkläre an einem Beispiel, wie natürliche Zahlen schriftlich addiert werden.

(c) Welche Rechengesetze der Addition gibt es? Wozu sind sie nützlich?

Lösung

(a) $3 + 4 = 7$. 3 bzw. 4 ist der erste bzw. zweite Summand und 7 ist der Summenwert.

(b) Wir schreiben die Zahlen stellenweise untereinander und addieren dann <u>stellenweise</u>.

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 7 & 2 \\ & & 6 & 8 & 3 \\ +_1 & & 9_1 & 3 & 4 \\ \hline & 2 & 8 & 8 & 9 \end{array}$$

(c)
- Das Kommutativgesetz:
  Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a + b = b + a$.
- Das Assoziativgesetz:
  Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Die Rechengesetze liefern Rechenvorteile, weil man längere Summen in jeder beliebigen Reihenfolge ausrechnen darf.

$427 + 1736 + 73 \overset{K}{=} 1736 + 427 + 73 \overset{A}{=} 1736 + 500 = 2236$

4.(a) Erkläre an einem Beispiel, wie die Bausteine einer Differenz heißen.

(b) Erkläre an einem Beispiel, wie natürliche Zahlen schriftlich subtrahiert werden.

Lösung

(a) $7 - 4 = 3$. 7 ist der Minuend, 4 ist der Subtrahend und 3 ist der Differenzwert.

(b) Wir schreiben die Zahlen stellenweise untereinander und sutrahieren dann stellenweise.

$$\begin{array}{rrrrr} & {}^{1}2 & {}^{7}8 & 4 & 7 \\ - & & 8 & 9 & 1 \\ \hline & 1 & 9 & 5 & 6 \end{array}$$

Rechnen in $\mathbb{Z}$

5.(a) Was versteht man unter der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$?

(b) Nenne Eigenschaften der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

(c) Was versteht man unter dem Betrag einer (ganzen) Zahl? Wie schreibt man das?

Lösung

(a) Wenn man zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die Null und die negativen ganzen Zahlen $-1, -2, -3\ldots$ hinzunimmt, erhält man $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots\}$.

(b)
- Zu jeder ganzen Zahl gibt es eine Gegenzahl. z.B. ist -3 die Gegenzahl von 3 und 5 die Gegenzahl von -5.
- Zahl und Gegenzahl sind auf der Zahlengerade gleich weit vom Nullpunkt entfernt.

(c) Der Betrag einer Zahl ist der Abstand der Zahl von der 0. Die Zahlen 3 und -3 haben z.B. den Betrag 3. Man schreibt $|+3| = 3$ bzw. $|-3| = 3$.

6. Erkläre an Beispielen, wie man das Ergebnis von Summen und Differenzen

(a) durch Wandern auf der Zahlengerade

(b) mit Rechenregeln endenumerate bestimmen kann.

Lösung

(a)
- $3 - 5$. Wenn man auf Zahlengerade auf der 3 steht und 5 Schritte rückwärts geht, steht man auf der -2. Also ist $3 - 5 = -2$.
- $-13 - 5$. Wenn man auf Zahlengerade auf der -13 steht und 5 Schritte rückwärts geht, steht man auf der -18. Also ist $-13 - 5 = -18$.

(b)
- $3-5$. Man rechnet $5-3 = 2$ (kleinerer $-$ größerer Betrag) und nimmt das Vorzeichen der 5 (größerer Betrag) Also: $3 - 5 = -2$
- $-13-5$. Man addiert die Beträge $13+5 = 18$ und nimmt das Vorzeichen $-$. Also ist $-13 - 5 = -18$.

7. Erkläre allgemein, wie man ganze Zahlen addiert bzw. subtrahiert. Beispiele.

Lösung

- Eine Additionsaufgabe der Form $(Zahl) + (Zahl)$ vereinfachen wir, indem wir die Klammern und das Rechenzeichen „+“ weglassen.

  Z.B. ist $(-3) + (-7) = -3 - 7 = -10$.
- Eine Subtraktionsaufgabe der Form $(Zahl) - (Zahl)$ vereinfachen wir, indem wir die Klammern und das Rechenzeichen „−“ weglassen **und das Vorzeichen der zweiten Zahl umdrehen**.

  Z.B. ist $(-3) - (-7) = -3 + 7 = +4$

  und

  $(-3) - (+7) = -3 - 7 = -10$.

8.(a) Erkläre an einem Beispiel, wie die Bausteine eines Produktes heißen.

(b) Erkläre an einem Beispiel, wie natürliche Zahlen schriftlich multipliziert werden.

(c) Welche Rechengesetze der Multiplikation gibt es? Wozu sind sie nützlich?

Lösung

(a) $3 \cdot 4 = 12$.

3 bzw. 4 ist der erste bzw. zweite Faktor und 12 ist der Produktwert.

(b)
$$\begin{array}{r} 3\,6\,8 \cdot 3\,7 \\ \hline 1\,1\,0\,4\,0 \\ 2\,5_1\,7\,6 \\ \hline 1\,3\,6\,1\,6 \end{array}$$

(c)
- Das Kommutativgesetz:
  Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
- Das Assoziativgesetz:
  Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt
  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Die Rechengesetze liefern Rechenvorteile, weil man Produkte in jeder beliebigen Reihenfolge ausrechnen darf.

$125 \cdot 1736 \cdot 8 \overset{K}{=} 1736 \cdot 125 \cdot 8 \overset{A}{=} 1736 \cdot 1000 = 1\,736\,000$

9. Erkläre am Beispiel die Formen, in denen das Distributivgesetz auftreten kann.

Lösung

- D-Gesetze der Multiplikation
  - Der erste Faktor ist eine Summe oder Differenz:
    $(3 \pm 7) \cdot 4 = 3 \cdot 4 \pm 7 \cdot 4$
  - Der zweite Faktor ist eine Summe oder Differenz:
    $4 \cdot (3 \pm 7) = 4 \cdot 3 \pm 4 \cdot 7$
- D-Gesetz der Division
  $(12 \pm 24) : 3 = 12 : 3 + 24 : 3$

Beachte: $12 : (4 + 2) \neq 12 : 4 + 12 : 2$

10.(a) Erkläre an einem Beispiel, wie die Bausteine eines Quotienten heißen.

(b) Erkläre an einem Beispiel, wie natürliche Zahlen schriftlich dividiert werden.

Lösung

(a) $12 : 4 = 3$.

12 ist der Dividend, 4 der Divisor und 3 ist der Wert des Quotienten.

(b) $2275 \;:\; 130 \;=$

$$\begin{array}{l} 2275:130 = 17 \text{ R } 65 \\ \underline{-130} \\ \;\;\;975 \\ \underline{-\,910} \\ \;\;\;\;65 \end{array}$$

11.(a) Wie werden zwei ganze Zahlen multipliziert bzw. dividiert? Beispiele!

(b) Nenne besondere Produkte und Quotienten.

Lösung

(a) Zuerst wird das Vorzeichen des Ergebnisses festgelegt.
Dabei gilt die Regel

$\cdot / :$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Dann muss noch das Ergebnis der Beträge berechnet werden.

Beispiele:
$3 \cdot (-4) = -3 \cdot 4 = -12$
$-30 : (-5) = +30 : 5 = 6$

(b)
- $0 \cdot a = 0$, $1 \cdot a = a$
- $0 : a = 0$ für $a \neq 0$
- $a : 1 = a$
- $a : 0$ ist nicht erlaubt.

12.(a) Erkläre an einem Beispiel, wie die Bausteine einer Potenz heißen.

(b) Was ist a^0, was a^1?

(c) Erkläre an einem Beispiel wie sich mit Hilfe von Zehnerpotenzen große Zahlen übersichtlich darstellen lassen.

(d) Erkläre an einem Beispiel, was man unter einer Primfaktorzerlegung versteht.

Lösung

(a) $2^3 = 8$.
2 ist die Basis, 3 der Exponent und 8 ist der Potenzwert.

(b) Für jede natürliche Zahl a ist $a^0 = 1$ und $a^1 = a$.

(c) $3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$, $21\,000\,000\,000\,000 = 21 \cdot 10^{12}$.

(d) Jede natürliche Zahl größer 1 lässt sich eindeutig in Primfaktoren zerlegen.
Beispiel: $440 = 8 \cdot 55 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$.

13. In welcher Reihenfolge musst du bei der Berechnung von größeren Termen (Rechenausdrücken) vorgehen? Beispiel!

Lösung

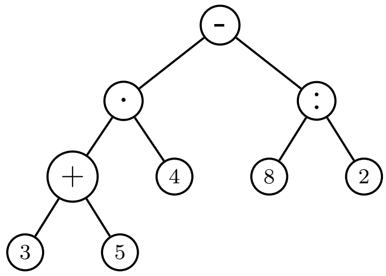
- Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet. Bei ineinandergeschachtelten Klammern werden die Klammern von innen nach außen aufgelöst.
- Bei den Rechengesetzen gilt: Potenzrechnung vor „Punktrechnung“ vor „Strichrechnung“.
- Was noch nicht berechnet werden kann, wird abgeschrieben.

Merksatz: Die Klammer sagt „Zuerst komm' ich“, dann merke dir stets „Punkt-vor-Strich“ und was noch nicht zu Rechnen dran, das schreibe unverändert an.
Beispiel:

$$\left[12 + \left(\underline{2^2} \cdot 3 - 5\right)\right] \cdot 4 - 1 =$$
$$[12 + (\underline{4 \cdot 3} - 5)] \cdot 4 - 1 =$$
$$\left[12 + \left(\underline{12 - 5}\right)\right] \cdot 4 - 1 =$$
$$\left(\underline{12 + 7}\right) \cdot 4 - 1 = \underline{19 \cdot 4} - 1 = 76 - 1 = \underline{\underline{\ 75\ }}$$

14. Erkläre an einem Beispiel, wie man zu einem Term den Rechnenbaum zeichnet, und wie man daran die Termart erkennt.

Lösung Beispiel: $(3+5)\cdot 4 - 8 : 2$



Die Termart liest man an dem Knoten ab, der keinen Vorgänger hat. Im Beispiel handelt es sich also um eine Differenz.

Beachte: Bei $\left\{\begin{array}{c}\text{Differenzen}\\ \text{Quotienten}\end{array}\right\}$ wird im Baum der $\left\{\begin{array}{c}\text{Minuend}\\ \text{Dividend}\end{array}\right\}$ stets im linken Zweig angetragen.

Rechnen mit Größen

15.(a) Was verstehst du unter messen?

(b) Nenne die Namen für bekannte Größen?

(c) Aus welchen Bausteinen bestehen ganz allgemein Größen?

Lösung

(a) Messen bedeutet vergleichen mit einer fest vorgegebenen Maßeinheit.

(b) Länge, Gewicht (Masse), Zeit, Geld, Flächeninhalt, Rauminhalt (Volumen), Geschwindigkeit.

(c) Eine Größe ist zusammengesetzt aus einer Maßzahl und einer Einheit (Größe=Maßzahl·Einheit). Z.B. hat die Länge 5 m die Maßzahl 5 und die Einheit Meter.

16. Gib die Einheiten sowie die Umrechnungszahlen (UZ) an für

(a) die Länge,

(b) die Masse (umgangssprachlich das Gewicht),

(c) die Zeit,

(d) das Geld,

(e) den Flächeninhalt.

Lösung

(a) mm – cm – dm – m – km
UZ: 10; Ausnahme: m – km, UZ 1000

(b) mg – g – kg – t, UZ 1000

(c) s – min – h – d, UZ 60; Ausnahme: h – d, UZ 24

(d) ct – €, UZ 100

(e) mm^2 – cm^2 – dm^2 – m^2 – a – ha – km^2, UZ 100

17. Wie rechnet man mit Größen (gleicher Art) beim

(a) Addieren und Subtrahieren?

(b) Multiplizieren und Dividieren?

Lösung

(a) Man bringt die Größen zuerst auf gleiche Maßeinheit und addiert bzw. subtrahiert dann nur die Maßzahlen und behält die Einheit bei.
z.B. $25\,\text{cm} + 1,2\,\text{m} - 4\,\text{dm} =$
$25\,\text{cm} + 120\,\text{cm} - 40\,\text{cm} = 1,05\,\text{m}$.

(b)
- Eine Größe multipliziert man mit einer Zahl, indem man die Maßzahl mit der Zahl multipliziert und die Einheit beibehält.
  z.B. $9\,\text{m} \cdot 3 = 3 \cdot 9\,\text{m} = 27\,\text{m}$.
- Eine Größe dividiert man durch eine Zahl, indem man die Maßzahl durch die Zahl dividiert und die Einheit beibehält
  z.B. $18\,\text{cm} : 6 = 3\,\text{cm}$.
- Der Quotient zweier Größen mit gleicher Einheit ist eine (reine) Zahl, z.B.
  $1,500\,\text{kg} : 500\,\text{g} = 1500\,\text{g} : 500\,\text{g} = 3$.