GYMNASIUM MIT SCHÜLERHEIM PEGNITZ
math.-technolog. u. sprachl. Gymnasium

WILHELM-VON-HUMBOLDT-STRASSE 7
91257 PEGNITZ
FERNRUF 09241/48333
FAX 09241/2564

Grundwissen JS 7: Geometrie

17. Juli 2007

1.(a) Wann heißt eine Figur achsensymmetrisch? Welche Bedeutung hat die Symmetrieachse anschaulich bzw. mathematisch?

(b) Wann heißt eine Figur punktsymmetrisch? Welche Bedeutung hat das Symmetriezentrum anschaulich bzw. mathematisch?

Lösung

(a) Eine Figur heißt achsensymmetrisch, wenn man sie so falten kann, dass ihre beiden Teile deckungsgleich sind.
Die Symmetrieachse ist

anschaulich:	die Faltkante
mathematisch :	die Menge aller Fixpunkte

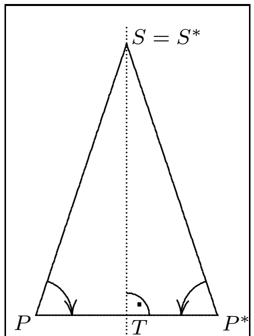
(b) Eine Figur heißt punktsymmetrisch, wenn man sie um einen festen Punkt so um 180° drehen kann, dass sie mit sich selbst zur Deckung kommt.
Das Symmetriezentrum ist

anschaulich:	der Drehpunkt
mathematisch	der Fixpunkt der Abbildung.

2. Nenne die wesentlichen Eigenschaften von achsensymmetrischen Figuren.

Lösung

- Zueinander **symmetrische**
  - **Strecken** sind gleich lang.
  - **Winkel** sind gleich groß und haben einen entgegengesetzten Drehsinn.
- Jeder Punkt der **Symmetrieachse** ist von zueinander symmetrischen Punkte gleich weit entfernt.
- Die **Verbindungsstrecke** zueinander symmetrischer Punkte wird von der Symmetrieachse rechtwinklig halbiert.

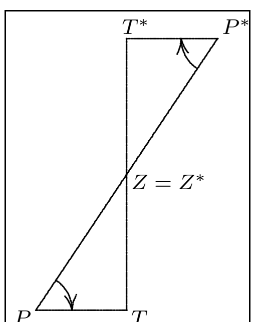


$\overline{P^*S^*} = \overline{PS}$
$\overline{P^*T} = \overline{PT}$
$\sphericalangle\, SP^*T = \sphericalangle\, TPS$

3. Nenne die wesentlichen Eigenschaften von punktsymmetrischen Figuren.

Lösung

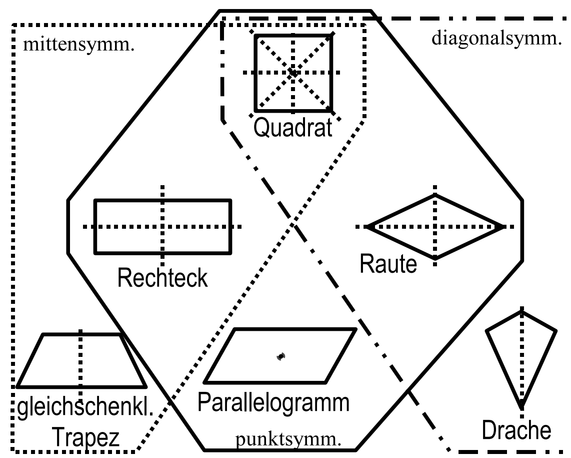
- Zueinander **symmetrische**
  - **Strecken** sind gleich lang und parallel.
  - **Winkel** sind gleich groß und haben den gleichen Drehsinn.
- Das **Symmetriezentrum** halbiert die Verbindungsstrecke zweier zueinander symmetrischer Punkte.



$\overline{P^*T^*} = \overline{PT}$
$[P^*T^*] \parallel [PT]$
$\sphericalangle\, TPZ = \sphericalangle\, T^*P^*Z$

4. Definiere die sechs wichtigsten symmetrischen Vierecke mittels der Art ihrer Symmetrie.

Lösung



5. Nenne die wichtigsten Eigenschaften von
   (a) Rechteck und Quadrat
   (b) Parallelogramm und Raute

Lösung Beim Parallelogramm, der Raute, dem Quadrat und dem Rechteck sind die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang.

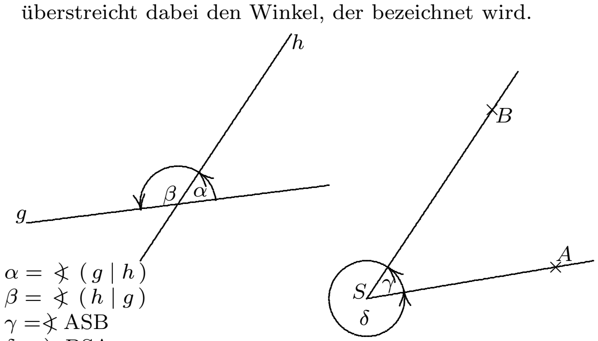
(a) Beim Rechteck und Quadrat sind zusätzlich alle Innenwinkel sind gleich 90°, beim Quadrat sind alle Seiten gleich lang.

(b) Beim Parallelogramm und der Raute sind die gegenüberliegenden Winkel gleich groß, bei der Raute sind alle vier Seiten gleich lang.

6. Auf welche Arten, außer durch griechische Buchstaben, kann man einen Winkel bezeichnen?

Lösung

- durch Geraden (bzw. Halbgeraden); die erste wird gegen den Uhrzeigersinn auf die zweite gedreht und überstreicht dabei den Winkel, der bezeichnet wird.
- durch Punkte, z.B. $\sphericalangle ASB$. Die Halbgerade $AS]$ wird gegen den Uhrzeigersinn auf die Halbgerade $[SB$ gedreht und überstreicht dabei den Winkel, der bezeichnet wird.

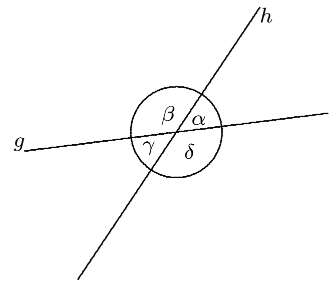


$\alpha = \sphericalangle\ (g \mid h)$
$\beta = \sphericalangle\ (h \mid g)$
$\gamma = \sphericalangle$ ASB
$\delta = \sphericalangle$ BSA

7. Definiere die Begriffe Scheitel- und Nebenwinkel und gib ihre wichtigste Eigenschaft an.

Lösung

- Eine Geradenkreuzung zerlegt die Ebene in vier Winkel. Ein Winkelpaar, das nur den Geradenschnittpunkt gemeinsam hat, bildet ein Scheitelwinkelpaar, zwei Winkel, die einen gemeinsamen Schenkel besitzen bilden eine Nebenwinkelpaar.
- Scheitelwinkel sind gleich groß Nebenwinkel ergänzen sich zu $180°$.



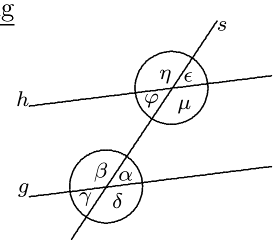
- Scheitelwinkelpaare
  $(\alpha \mid \gamma)$, $(\beta \mid \delta)$
- Nebenwinkelpaare
  $(\alpha \mid \beta)$, $(\beta \mid \gamma)$
  $(\gamma \mid \delta)$, $(\delta \mid \alpha)$

8.(a) Erkläre am Beispiel, wie man die Lagebeziehungen zweier Winkel an einer Doppelgeradenkreuzung beschreiben kann und gib die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten an.

(b) Was lässt sich über die Größe der Innenwinkel im 3-, 4-, 5-, … Ecks sagen?

Lösung

(a)



- Stufenwinkelpaare
  z.B. $(\beta \mid \eta)$, $(\delta \mid \mu)$
- Wechselwinkelpaare
  z.B. $(\alpha \mid \varphi)$, $(\beta \mid \mu)$
- Nachbarwinkelpaare
  z.B. $(\alpha \mid \mu)$, $(\beta \mid \varphi)$

An parallelen Geraden ergänzen sich Nachbarwinkel zu $180°$, Stufen- und Wechselwinkel sind jeweils gleich groß. Der Kehrsatz gilt ebenfalls.

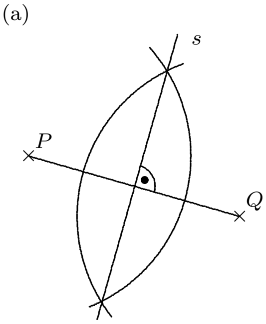
(b) Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt $180°$. Dann kommen pro Ecke $180°$ hinzu. Im Viereck ist also die Innenwinkelsumme gleich $360°$, im 5-Eck $540°$ …

9.(a) Beschreibe, wie man zu zwei vorgegebenen Punkte P und Q die Symmetieachse s konstruieren kann.

(b) Welche Bedeutung hat diese Symmetrieachse für die Strecke $[PQ]$?

Lösung

(a)



Die beiden Kreisbögen um P und Q müssen den gleichen Radius haben. s ist die Gerade durch die Schnittpunkte der Kreise.

(b) Die Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte der Strecke $[PQ]$, d.h. sie halbiert die Strecke $[PQ]$ senkrecht.

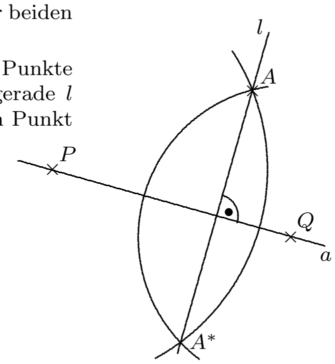
10.(a) Beschreibe, wie man zu einem vorgegebenen Punkt A und einer vorgebenen Symmetrieachse a den zu A symmetrischen Punkt A^* findet.

(b) Welche besondere Gerade kann man mit der unter (a) beschiebenen Konstruktion finden?

Lösung

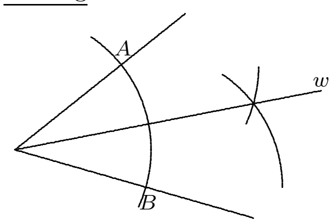
(a) Man wählt zwei Punkte P und Q auf a und zieht zwei Kreisbögen um P und Q durch den Punkt A gehen. A^* ist der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise.

(b) Die Gerade durch die Punkte A und A^* ist die Lotgerade l die Gerade a durch den Punkt A.



11. Beschreibe, wie man zu einem vorgegebenen Winkel die Winkelhalblierende w konstruieren kann.

Lösung



Man wählt zwei Punkte A und B die vom Scheitel gleichweit entfernt sind (Kreisbogen um den Scheitel) und zeichnet zwei gleich große Kreise um A und B. Die Winkelhalbierende w verbindet den Scheitel des Winkels mit einem Schnittpunkt der letzten beiden Kreise.

12.(a) Beschreibe den Begriff „Kongruenz“ anschaulich.

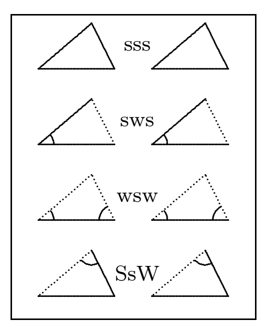
(b) Nenne die Kongruenzsätze für Dreiecke.

Lösung

(a) Wenn sich zwei Figuren vollständig miteinander zu Deckung bringen lassen, so heißen sie deckungsgleich oder kongruent.

(b) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in folgenden Konstruktionsdaten übereinstimmen:

- in den drei Seitenlängen (sss)
- in zwei Seitenlängen und der Größe des eingeschlossenen Winkels (sws)
- in einer Seitenlänge und der Größe der zwei anliegenden Winkel (wsw)
- in zwei Seitenlängen und der Größe des der längeren der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels (SsW)



13.(a) • Definiere ein gleichschenkliges Dreieck mittels Symmetrie.

- Nenne die wesentlichen Bezeichnungen und Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks.

(b) • Definiere ein gleichseitiges Dreieck mittels Symmetrie.

- Nenne die wesentlichen Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks.

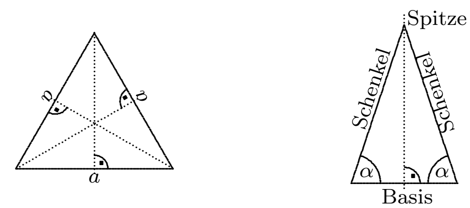
Lösung

(a) • Ein Dreieck mit (mindestens) einer Symmetrieachse heißt gleichschenkliges Dreieck.

- – Die Symmetrieachse halbiert den Winkel an der Spitze.
  – Die Symmetrieachse halbiert die Basis rechtwinklig.
  – Zwei Seiten, Schenkel genannt, sind gleich lang.
  – Die Basiswinkel sind gleich groß (Basiswinkelsatz).

(b) • Ein gleichseitiges Dreieck hat drei Symmetrieachsen.

- Alle Seiten sind gleich lang, alle Innenwinkel sind 60°.



14.(a) Definiere den Begriff rechtwinkliges Dreieck.

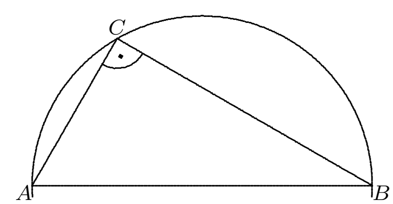
(b) Nenne die wesentlichen Eigenschaften und Begriffe eines rechtwinkligen Dreiecks.

Lösung

(a) Ein Dreieck, bei dem ein Innenwinkel 90° beträgt, heißt rechtwinklig.

(b) • Die beiden Seiten, die den rechten Winkel bilden, heißen Katheten, die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt Hypotenuse.

- Ein Dreieck ABC ist genau dann rechtwinklig im Punkt C, wenn C auf dem Kreis (Thaleskreis genannt) liegt, der die Strecke $[AB]$ als Durchmesser hat (Satz des Thales).



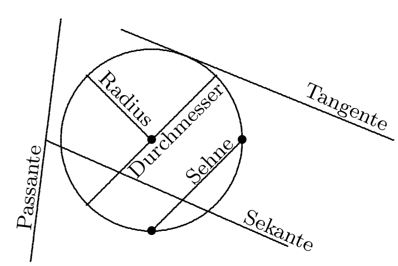
15. Definiere die Linien, die im Zusammenhang mit Kreisen auftreten können.

Lösung

(a) Eine Gerade, die einen Kreis nicht/einmal/zweimal schneidet heißt Passante, Tangente, Sekante.

(b) Eine Sehne ist eine Stecke zwischen zwei Kreispunkten; eine Sehne, die durch den Kreismittelpunkt geht, heißt Durchmesser.

(c) Eine Strecke, die den Kreismittelpunkt mit einem Punkt der Kreislinie verbindet, heißt Radius.



16.(a) Definiere die vier Dreieckstransversalen eines Dreiecks ABC.

Lösung

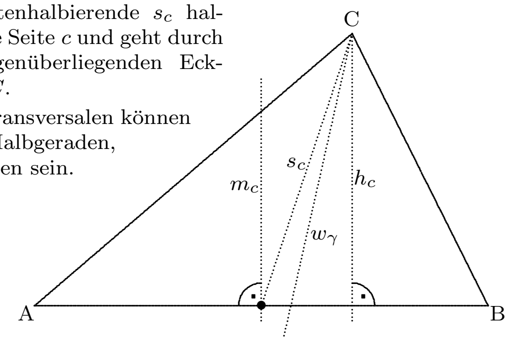
(a) Die Mittelsenkrechte m_c halbiert die Seite c und steht senkrecht auf ihr.

(b) Die Höhe h_c steht senkrecht auf der Seite c und geht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt C.

(c) Die Winkelhalbierende w_γ halbiert den Winkel γ.

(d) Die Seitenhalbierende s_c halbiert die Seite c und geht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt C.

Alle vier Transversalen können Strecken, Halbgeraden, oder Geraden sein.



17. Nenne die wesentlichen Eigenschaften der Transversalen eines Dreiecks ABC.

Lösung

(a) Gleichartige Transversalen schneiden sich in einem Punkt.

(b) Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt, die Winkelhalbierenden im Inkreismittelpunkt.